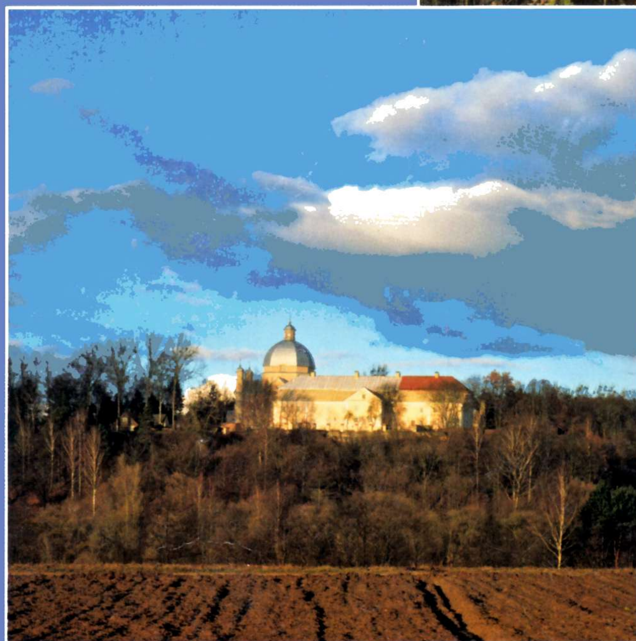
MATEMATIKA 8

MOKYTOJO KNYGA







MATEMATIKA 8

MOKYTOJO KNYGA

TEV

VILNIUS 2000

UDK 372.851
Ma615

Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos leista naudoti 2000 05 31, grifo Nr. 73

Darbo vadovas: *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys, Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Tadeuš Šeibak*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė, Inga Paukštienė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė, Aldona Žalienė*

Gamybos vadovas: *Algimantas Paškevičius*

Kalbos redaktorė: *Diana Gustienė*

Konsultantai: *Aleksandras Plikusas, Marytė Stričkienė, Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV *Interneto* svetainė: www.tev.lt

2000 06 01. 20,5 sp. l. Tiražas 4000 egz. Užs. Nr. 20
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius
Spausdino UAB „Logotipas“ spaustuvė,
Žalgirio g. 108, LT-2005 Vilnius

ISBN 9986-546-82-6

TURINYS

Gerbiami mokytojai,

Leidykla TEV toliau tęsia komplektinių matematikos priemonių leidimą. Ši knyga yra to paties leidykloje susibūrusio kolektyvo, parašiusio vadovėlį „Matematika 8, I ir II dalys" ir su juo suderintą uždavinyną, darbo tęsinys.

Vadovėlius ir uždavinyną rengė pedagogai Nijolė Cibulskaitė, Kornelija Intienė, Kazimieras Pulmonas, Viktorija Sičiūnienė, Juozas Šinkūnas ir Vladas Vitkus, paskutinieji penki rašė ir šią „Mokytojo knygą".

Gavę teigiamų atsiliepimų apie komplektinę mokymo priemonę „Matematika 7" (ji Švietimo ir mokslo ministerijos pripažinta geriausia 1999 metų mokymo priemone) tikimės, kad ir „Matematika 8" susilauks palankaus įvertinimo.

Laukiame jūsų atsiliepimų tiek apie visą komplektą, tiek apie šią mokytojo knygą.

Rašykite adresu: Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2600 Vilnius.

LEIDĖJAI

PRATARMĖ

Dėstydamas matematiką 8 klasėje mokytojas turi būti susipažinęs su pagrindinės mokyklos matematinio išsilavinimo standartais bei matematikos programa 5–10 klasėms. Kadangi ne visose mokyklose jų yra pakankamai, sudėjome šiuos dokumentus į mokytojo knygą manydami, kad jie privalo būti ant kiekvieno mokytojo stalo.

Mokytojams, anksčiau nedirbusiems su naująja programa, reikėtų susipažinti su pagal ją parašytais 5 ir 6 klasių matematikos vadovėliais „Matematika ir pasaulis" bei 7 klasės vadovėliu „Matematika 7".

Dėstant naują medžiagą reikėtų padėti mokiniams išvengti mechaniško kalimo ir siekti, kad mokiniai suprastų esminius dalykus, mokėtų paaiškinti, *kodėl* yra taip ar kitaip. Reikia siekti, kad mokiniai sugebėtų įprastinius sakinius užrašyti matematine (simbolių) kalba, taip pat ir atvirkščiai — matematines išraiškas, brėžinius, lygčių sprendimą persakyti žodžiais. Būtina mokinius pratinti analizuoti sąlygą, prognozuoti, tikrinti atsakymą, daryti išvadas ir apibendrinimus, uždavinio sprendimą skirstyti etapais.

Mokytojui nebūtina laikytis vadovėlio metodinio stiliaus — svarbiausia, kad mokiniai teisingai suvoktų esminius momentus ir mokėtų naudotis išeita medžiaga spręsdami konkrečius uždavinius.

Vadovėlyje „Matematika 8" yra 12 skyrių. Kiekvienas skyrius padalytas į skyrelius. Kiekviename jų pateikiama teorinė medžiaga ir uždaviniai. Teorinė medžiaga duodama siekiant pakartoti jau žinomus dalykus ir juos praplečiant iki dar nežinomų, bet programoje numatytų matematinių tiesų. Teorinė vadovėlio medžiaga yra gana plati, todėl ją gali skaityti ir suprasti patys mokiniai. Mokytojui reikėtų pratinti mokinius dirbti su vadovėliu savarankiškai, t. y. skaityti teoriją, ieškoti atsakymų į klausimus ir juos kelti. Vadovėlio teorinėje dalyje yra daug klausimų ir užduočių, kuriuos turėtų atlikti mokiniai. Apie pusę kiekvieno skyrelio pirmųjų užduočių yra skiriamos einamai teorinei medžiagai mokyti, o likusios — praeitai medžiagai gilinti, plėtoti ir kartoti. Sunkesnių uždavinių numeriai nuspalvinti. Mokytojas neprivalo reikalauti išspręsti visus uždavinius. Kiekvieno skyriaus gale yra skyrelis „Pasitikrinkite". Jo uždavinius mokiniai turėtų mokėti išspręsti savarankiškai. Ruošdami kontrolinius darbus mokytojai gali juo remtis kaip tam tikru standartu. Tiek mokytojams, tiek mokiniams pravers uždavinynas, kuriame yra gerokai daugiau uždavinių.

Šioje, kaip ir 7 klasės mokytojo knygoje, buvo stengtasi per daug nenurodinėti, kaip mokyti vaikus, kaip planuoti pamoką, kiek laiko skirti vienai ar kitai temai dėstyti ir pan. Taip pat čia nerasite plačių didaktinių apibendrinimų ar gilių metodologinių samprotavimų. Autorių tikslai buvo koncentruotai ir trumpai suformuluoti dėstomos medžiagos esmę akcentuojant matematinę kurso pusę. Patyrusiems mokytojams gali pasirodyti, kad kai kurie paaiškinimai per daug detalūs, bet jiems neturėtų būti sunku atsirinkti tai, kas svarbiausia.

1. PAGRINDINĖS MOKYKLOS MATEMATINIO IŠSILAVINIMO STANDARTAI

Pagrindinės mokyklos matematinio išsilavinimo standartai nusako pagrindinę mokyklą baigiančių moksleivių matematikos žinių ir gebėjimų reikalavimus. Šie standartai formuluojami trimis lygmenimis: *minimaliuoju, pagrindiniu* ir *aukštesniuoju*. Minimalusis lygmuo apibūdina privalomus reikalavimus teigiamam matematikos pažymiui gauti. Šiam lygmeniui būtinas gebėjimas savarankiškai atlikti paprasčiausias praktines užduotis, spręsti elementarius arba supaprastintus uždavinius, kuriems atlikti užtenka pritaikyti vieną standartinę procedūrą. Dažnai pasikartojantys žodžiai *nesudėtingi, paprasčiausi* reiškia aktyvią *mokytojo pagalbą* individualiai aiškinant užduotį moksleiviui: ją supaprastinant, nagrinėjant dalinį atvejį ir pan. Pagrindinis lygmuo nusako bazinį *matematinį raštingumą*. Jis trumpai galėtų būti nusakomas gebėjimu *savarankiškai* taikyti standartinius ar jau naudotus sprendimo algoritmus naujai užduočiai, naudotis analogijomis, argumentuoti, matematiškai tirti paprasčiausias praktines situacijas. Aukštesniajam lygmeniui reikia ne tik gilesnių matematinių žinių, bet ir loginio mąstymo pagrindų, gebėjimų savarankiškai tirti matematinį reiškinį, jį argumentuoti, įrodinėti ir pan. Pagrindinio lygmens reikalavimai apima visus minimaliojo lygmens reikalavimus (nors ir ne visada įvardytus), aukštesniojo — visus minimaliojo ir pagrindinio lygmenų reikalavimus.

Pagrindinės mokyklos matematinio išsilavinimo standartai suskirstyti į šias penkias pagrindines mokymo kryptis atitinkančias grupes:

I. Matematinis tyrimas.

II. Skaičiavimai.

III. Algebra, sąryšiai ir funkcijos.

IV. Geometrija.

V. Statistika ir tikimybės.

Kiekvienos krypties pabaigoje pateikiami užduočių, atitinkančių tą lygmenį, pavyzdžiai. Jie yra tik viena daugelio galimų reikalavimų iliustracijų ir nepretenduoja į norminių uždavinių statusą, skirti matematikos mokytojui lengviau suprasti atitinkamos grupės ir lygmens reikalavimus.

PASIEKIMŲ LYGMENYS		
Minimalusis	Pagrindinis	Aukštesnysis
1	2	3
I. MATEMATINIS TYRIMAS		
Supranta nesudėtingą matematinę kalbą, aiškina ir aprašo paprastas situacijas matematiškai (vartodami tinkamus terminus, simbolius bei grafikus).	Supranta ir panaudoja įvairiomis matematinėmis formomis pateiktą informaciją; moka paaiškinti nesudėtingas situacijas matematiškai; kritiškai vertina pateiktą informaciją; aiškiai ir sistemingai dėsto sprendimus.	Programos nustatytose ribose vartoja (klauso, skaito, kalba ir rašo) matematinę kalbą.
Supranta, kokios informacijos trūksta paprastose užduotyse, ir moka ją susirasti.	Nesudėtingoms užduotims atlikti susiranda trūkstamą informaciją.	Moka susirasti trūkstamą informaciją.
Randa ir atpažįsta paprasčiausius matematinius dėsningumus ir struktūras; daro pagrįstus spėjimus; bent iš dalies argumentuoja savo sprendimus (remdamiesi pavyzdžiais ar bendrais teiginiais).	Randa ir atpažįsta nesudėtingus matematinius dėsningumus ir struktūras; juos tikrina ir apibendrina (bent iš dalies); aiškiai ir sistemingai išdėsto sprendimus, juos pagrindžia ir argumentuoja.	Konstruktyviai tikrina apibendrinimus ir sprendimus; naudojasi kontrpavyzdžiais; pateikia logišką darbo ataskaitą; abstrakčiai įrodinėja — nesudėtingais atvejais taiko dedukciją ir indukciją.
Paprasčiausiais atvejais naudoja bendrąsias situacijų tyrimo, uždavinių sprendimo ir mąstymo strategijas (atskirų pavyzdžių nagrinėjimą, skaidymą į paprastesnes, lengviau įveikiamas dalis, variantų perrinkimą, uždavinio performulavimą patogesniu pavidalu).	Nesudėtingais atvejais moka panaudoti bendrąsias situacijų tyrimo ir mąstymo strategijas (bandymų ir klaidų metodą, uždavinio skaidymą į dalis, variantų perrinkimą, atskirų atvejų nagrinėjimą ir pastebėtų dėsningumų apibendrinimą).	Naudoja bendrąsias situacijų tyrimo ir mąstymo strategijas; savarankiškai aiškinasi naujas matematikos temas, kurios siejasi su jau išmokta medžiaga.
Moka panaudoti paprasčiausius ryšius, siejančius tarpusavyje skirtingas matematikos temas, matematikos ryšius su kitais mokomaisiais dalykais.	Naudojasi pagrindiniais ryšiais tarp matematinių temų bei mokyklinės matematikos ir kitų mokomųjų dalykų.	Tiria ryšius tarp skirtingų matematinių temų ir mokomųjų dalykų, moka jais pasinaudoti.
Savarankiškai naudojasi paprastų algoritmų aprašymais.	Sugeba savarankiškai pasinaudoti nesudėtingų algoritmų aprašymais bei sudaryti ir aprašyti paprastus algoritmus.	Sugeba savarankiškai sudaryti, aprašyti bei realizuoti algoritmus.
Paprasčiausiose situacijose sugeba taikyti matematiką ir naudotis standartiniais metodais spręsdami paprastus matematinius ir ne tik matematinius uždavinius.	Nesudėtingose situacijose naudoja matematinį modeliavimą bei taiko mokyklinę matematiką, naudoja standartinius metodus uždaviniams spręsti.	Taiko matematinį modeliavimą bei mokyklinės matematikos metodus įvairioms problemoms spręsti.
UŽDUOČIŲ PAVYZDŽIAI		
Koks yra tavo amžius mėnesiais?	Ar gali pasakyti, kada mėnesiais matuojant amžių bus artimiausias tavo jubiliejus?	Koks yra tavo amžius dienomis? Kada taip matuojant laiką bus artimiausias tavo jubiliejus?
Kiek pėdų atspaudų paliktum pajūrio smėlyje nužingsniavęs 1 km?	Tarkime, kad kiekvienas iš dviejų skaičių yra 144 daliklis. Ar šių skaičių sandauga taip pat visada yra 144 daliklis?	Tarkime, kad kiekvienas iš dviejų skaičių p ir q yra skaičiaus N daliklis. Ar šių skaičių sandauga taip pat visada yra N daliklis?
Tarkime, kad tu kalbi telefonu su savo draugu ir nori jam paaiškinti brėžinį (žr. pav.). Tavo draugas negali matyti brėžinio, todėl tu pamėgink jį aprašyti žodžiais taip, kad draugas galėtų nusibraižyti tiksliai tokį patį.	Grafike pavaizduota istorija, kaip berniukas bandė suspėti į autobusą, vežantį jį į mokyklą. Ar gali pagal šį brėžinį atkurti įvykių eigą?	Automobilis pirmąjį trečdalį kelio nuvažiavo 70 km/h, antrąjį — 90 km/h, o paskutinįjį — 80 km/h greičiu. Koks yra vidutinis visos kelionės greitis? Tarkime, $p = 5 \cdot 10^2$. Parašykite skaičius p^3 ir p^{-2} standartine išraiška.
Kokių dviženklių skaičių yra daugiau — lyginių ar nelyginių?	Patikrinkite ir argumentuokite teiginį: *Dviejų paeiliui einančių natūraliųjų skaičių suma nesidalija iš 2.*	Patikrinkite ir argumentuokite teiginį: *Trijų paeiliui einančių natūraliųjų skaičių suma dalijasi iš 3.*
Naudodamiesi skaičiuokliu raskite tris pirminius skaičius, kurių sandauga yra 5797.	Keliais skirtingais būdais galima dviem spalvomis nudažyti kubą? (Nudažymai nelaikomi skirtingais, jei sukiojant kubelį vieną galima gauti iš kito.)	Kiek skirtingų trumpiausių kelių jungia taškus A ir B (kelias eina tik brėžinio linijomis)?
Iš kurios figūros galima išlankstyti kubą lenkiant per parodytas lenkimo linijas?	Viena popieriaus lapo pusė yra balta, kita — juoda. Iš šio lapo iškirptos keturios vienodos figūros ir padėtos ant stalo (žr. brėž.). Trys iš jų atverstos vienos spalvos puse, ketvirta — kitos spalvos. Kuri figūra skiriasi nuo kitų spalva? Atsakymą paaiškinkite.	Sugalvokite kitų panašių figūrų pavyzdžių.
Kambaryje, kurio plotas $24\,m^2$, reikia sudėti grindis. Lentos parduodamos kubiniais metrais. Kiek apytikriai lentų reikia pirkti, jei lentos storis yra 3 cm?	Albertas nori pasidaryti rėmelį savo piešiniui. Rėmelis atrodo geriausiai, kai jo ilgio ir pločio santykis atitinka aukso pjūvio principą. Koks turi būti rėmelio plotis, jei jo ilgis yra 64 cm?	Koks turi būti rėmelio ilgis, jei jo perimetras yra 182 cm?

1	2	3
	II. SKAIČIAVIMAI	
Skaito, rašo, interpretuoja ir surikiuoja pagal dydį nesudėtingus skaičius bei juos įvertina; suprastina ir vartoja paprasčiausias sąvokas, susijusias su skaičiais ir skaičiavimais.	Skaito, rašo ir interpretuoja įvairių pavidalų skaičius bei rikiuoja juos pagal dydį arba įvertina; supranta ir tinkamai vartoja sąvokas, susijusias su skaičiais ir skaičiavimais.	Sprendžia sudėtingas skaitinių reiškinių įvertinimo ir palyginimo problemas; tiria sąvokas, susijusias su skaičiais ir skaičiavimais.
Pasirenka tinkamą skaičiavimo metodą uždaviniui spręsti.	Iš galimų skaičiavimo metodų pasirenka tinkamiausią.	Įvertina galimus skaičiavimo metodų privalumus ir trūkumus.
Tikrindami, ar teisingai išsprendė paprastus uždavinius, įvertina gautą atsakymą; paprastose situacijose nusprendžia, ar skaičiavimai turi būti tikslūs, ar užtenka apytikslio sprendimo.	Nesudėtingų uždavinių skaičiavimų klaidoms rasti naudoja įvairius atsakymo vertinimo būdus (taip pat ir tuo atveju, kai skaičiuojama skaičiuokliu).	Pasirenka pakankamai patikimą skaičiavimų rezultato vertinimo būdą.
Teisingai mintinai atlieka daugumą paprastų skaičiavimo veiksmų.	Pasirenka tinkamą mintino skaičiavimo būdą; mintinai daugina ir dalija vieno skaitmens ir dešimties laipsnio sandaugas.	Mintinai skaičiuodami efektyviai taiko skaičių ir veiksmų savybes.
Teisingai atlieka daugumą veiksmų (skaičiuodami raštu ar naudodami skaičiuoklį) su sveikaisiais skaičiais, dešimtainėmis trupmenomis, racionaliaisiais skaičiais, procentais, laipsniais ir kvadratinėmis šaknimis.	Profesionaliai atlieka veiksmus (raštu ir skaičiuokliu) su sveikaisiais skaičiais, dešimtainėmis trupmenomis, racionaliaisiais skaičiais, procentais, proporcijomis, laipsniais ir šaknimis.	Analizuoja skaičiavimo metodus ir juos tobulina.
Skiria paprasčiausias skaičių teorijos sąvokas.	Paaiškina nesudėtingas skaičių teorijos sąvokas bei teiginius ir taiko juos paprastiems uždaviniams spręsti.	Įrodinėja nesudėtingus skaičių teorijos teiginius ir taiko juos uždaviniams spręsti.
Atlieka elementarius pertvarkymus ir skaičiavimus su paprasčiausiais algebriniais reiškiniais; pagal paprasčiausias formules skaičiuoja dydžių reikšmes.	Atlieka pertvarkymus ir skaičiavimus su nesudėtingais algebriniais reiškiniais, pasirenka patogesnius veiksmų atlikimo būdus.	Analizuoja skaičiavimų su algebriniais reiškiniais būdus ir juos tobulina.
Sprendžia paprastus praktinius skaičiavimo uždavinius; atlieka paprasčiausius skaičiavimus, susijusius su asmeniniu biudžetu, matais ir matavimais.	Tinkamai naudoja skaičiavimus nesudėtingiems uždaviniams spręsti; atlieka paprasčiausius skaičiavimus, susijusius su asmeniniu biudžetu ir smulkiojo verslo tvarkymu.	Naudoja skaičių sąvokas ir skaičiavimus sudėtingoms matematinėms ir praktinėms problemoms tirti; atlieka nesudėtingus ekonominius skaičiavimus.
UŽDUOČIŲ PAVYZDŽIAI		
Kuris skaičius yra didesnis: 5/3 ar 7/4?	Mintinai įvertinkite, kuris sveikasis skaičius yra artimiausias dalmeniui 278 : 39.	Mintinai įvertinkite, tarp kurių gretimų sveikųjų skaičių yra reiškinio $(0{,}025\times 834):5{,}7$ reikšmė.
Kurie iš šių skaičių yra racionalieji: $-3/4$; $\sqrt{2}$; 0;	3,14; 0,(3); $\sqrt{7}$;	$\sqrt{20}$; 1,010010001...; $\lvert 3{,}14-\pi\rvert$?
Suprastinkite reiškinius: $\frac{ab^2}{3}+\frac{ab^2}{6}$; $\frac{2mn^3}{4m^2n}$.	Suprastinkite reiškinius: $(2a+3b)^2-(3a+2b)^2$; $\frac{m^2n-n^3}{(m+n)^2}$.	
Suapvalinkite iki dešimtųjų: 7,56; 13,149.	Kambario ilgis yra 3,3 m, plotis — 4,1 m. Apskaičiuokite kambario plotą kvadratiniais metrais.	
	Keliais nuliais baigiasi penkiolikos natūraliųjų skaičių 1, 2, 3, ..., 14, 15 sandauga?	Kokiu skaitmeniu baigiasi skaičius 2^{99}?

1	2	3
	III. ALGEBRA, SĄRYŠIAI IR FUNKCIJOS	
Priderina algebrinius reiškinius, lygtis ir nelygybes prie frazių ir situacijų, kurias jie atitinka.	Žodinius realaus gyvenimo situacijų aprašymus išreiškia algebriniais reiškiniais, lygtimis ir nelygybėmis.	Aprašo sudėtingas problemas lygtimis ir nelygybėmis.
Nusako priklausomybes, kai pateiktos reikšmių lentelės arba paprastos žodinės taisyklės.	Nusako priklausomybes pagal reikšmių lenteles, sudarytas nagrinėjant sąryšius, arba pagal nesudėtingas žodines taisykles.	Sudaro reikšmių lenteles (iš eksperimento duomenų ar formulių), analizuoja grafikus.
Braižo paprastų standartinių elementariųjų funkcijų grafikų eskizus.	Išreiškia sąryšius grafiškai; kombinuodami įvairius būdus ir metodus braižo funkcijų grafikus.	Išreiškia sąryšio grafiką formule.
Nustato dėsningumus ir juos praplečia konkretiems atvejams.	Nustato dėsningumus ir aprašo juos algebriniais reiškiniais su kintamaisiais.	Randa ir algebriniais reiškiniais aprašo sudėtingus dėsningumus.
Konkrečioms situacijoms tirti taiko paprasčiausias elementariųjų funkcijų savybes.	Taiko elementariųjų funkcijų savybes nesudėtingiems uždaviniams spręsti; modeliuoja elementariosiomis funkcijomis paprasčiausius realaus gyvenimo reiškinius.	Taiko elementariąsias funkcijas sudėtingesnėms situacijoms modeliuoti ir įvairioms problemoms spręsti.
Sprendžia paprastas lygtis ir nelygybes bandymų ir klaidų metodu, grafiškai arba taikydami algoritmus.	Taikydami formalius metodus ir algoritmus sprendžia lygtis ir nelygybes; spręsdami uždavinius sudaro ir išsprendžia paprastas lygtis ir nelygybes.	Sprendžia sudėtingesnes lygtis ir nelygybes bei moka jas panaudoti spręsdami uždavinius.
UŽDUOČIŲ PAVYZDŽIAI		
Vienos rūšies picos skersmuo yra 20 cm, kitos — 30 cm. Kiek kartų antroji pica yra didesnė už pirmąją?	Balandžio 1 d. Kaune saulė tekėjo 6:53, o po savaitės — 6:37. Kurią valandą saulė patekės balandžio 11 d., jei tarsime, kad saulės tekėjimo laiko priklausomybė nuo datos per kelias savaites yra tiesinė?	Astronomijoje naudojamas atstumo matavimo vienetas *persekas* lygus atstumui, iš kurio Žemės orbitos apie Saulę spindulys matomas vieno laipsnio kampu. Išreikškite perseką kilometrais.
Žinoma, kad automobilio stabdymo kelio ilgis L proporcingas automobilio judėjimo greičio v kvadratui. Kuri iš formulių gali aprašyti šį sąryšį: $L = \frac{0{,}01}{v}$; $L = 0{,}01v^{-2}$; $L = 0{,}01v^2$?	Pradinis važiavimo taksi mokestis yra 1,40 Lt, vėliau už kiekvieną nuvažiuotą kilometrą mokama 1,20 Lt. Užrašykite ir nubraižykite kainos priklausomybę nuo nuvažiuoto kelio. Kiek kilometrų galima nuvažiuoti už 20 Lt?	Tarkime, $f(x) = x^2 - x$. Nubraižykite šių funkcijų grafikų eskizus: $y = f(x-2)$; $y = f(3x)$; $y = 2f(x) - 2$; $y = \lvert f(x)\rvert$.
	Vytas pirko du storus ir vieną ploną sąsiuvinius, Juozas — vieną storą ir du plonus. Kiek kainavo kiekvienos rūšies sąsiuviniai, jei Vytas sumokėjo 4,70 Lt, o Juozas — 3,10 Lt?	Ištirkite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2 + y^2 = a; \\ xy = b. \end{cases}$
Nustatykite natūraliųjų skaičių sekos 1, 5, 9, 13, 17, ... dėsningumą ir pratęskite ją.	Nustatykite natūraliųjų skaičių sekos 3, 8, 15, 24, 35, ... dėsningumą ir pratęskite ją. Užrašykite n-tojo nario formulę.	Medinio kubo paviršius nudažomas raudonai, o kubas supjaustomas į n^3 lygių kubelių. Kubeliai suskirstomi į grupes pagal nudažytų sienelių skaičių. Kiek kubelių bus kiekvienoje grupėje?
Raskite du natūraliuosius skaičius, kurių kvadratų suma lygi 34.	Bandymų ir klaidų metodu išspręskite lygtį $x^3 + x = 21$ vienos šimtosios tikslumu.	Kiek sprendinių gali turėti lygtis $x^2+\lvert x\rvert = a$ priklausomai nuo parametro a reikšmių?

1	2	3
	IV. GEOMETRIJA	
Taisyklingai vartoja ir paaiškina savais žodžiais nesudėtingas geometrijos sąvokas; klasifikuoja figūras, paaiškina jų savybes; vaizduoja paprasčiausias trimates figūras plokštumoje.	Apibrėžia pagrindines geometrijos sąvokas ir jas vartoja spręsdami uždavinius; apibrėžia ar paaiškina vartodami tikslią matematinę kalbą figūrų savybes.	Analizuoja geometrines savybes ir sąvokas išsakydami savo mintis tikslia matematine kalba; vartodami geometrines sąvokas formuluoja ir sprendžia problemas.
Taikydami įvairius metodus atlieka paprastas brėžimo ir konstravimo užduotis.	Atlieka nesudėtingas brėžimo ir konstravimo užduotis ir pagrindžia savo darbo eigą.	Tiria brėžimo užduotis ir aiškina galimus alternatyvius užduoties atlikimo būdus.
Skiria judesių, vaizdų ir simetrijų rūšis plokštumoje; atpažįsta figūrų panašumą; naudojasi masteliu paprasčiausioms užduotims atlikti (skaito ir aiškina brėžinius, žemėlapius, schemas ir pan.).	Įvairiais būdais aprašo judesius, vaizdus ir simetrijas; apibrėžia figūrų panašumą ir jį taiko spręsdami uždavinius; skaito ir braižo brėžinius ar schemas, naudojasi masteliu.	Apibrėžia transformacijas kaip Dekarto plokštumos atvaizdžius; tiria figūrų panašumą ir pagrindžia tyrimo rezultatus.
Skiria susikertančių, lygiagrečių ar statmenų tiesių kampų savybes; apskritimo spindulių, stygų ir liestinių kampų savybes.	Taiko susikertančių, lygiagrečių ar statmenų tiesių kampų savybes uždaviniams spręsti; taiko apskritimo spindulių, stygų ir liestinių kampų savybes uždaviniams spręsti.	Tiria kampų savybes ir pagrindžia tyrimo rezultatus.
Pasinaudoja teoremomis apie trikampio ir keturkampio kampus, Pitagoro teorema paprasčiausiems uždaviniams spręsti.	Formuluoja ir įrodinėja teoremas apie trikampio ir keturkampio kampus bei Pitagoro teoremą ir taiko jas spręsdami uždavinius.	Formuluoja, įrodinėja ir taiko pagrindines trikampio geometrijos ir apskritimo geometrijos teoremas; tiria geometrinių figūrų savybes bei pagrindžia tyrimo rezultatus.
Aiškina pagrindines trigonometrijos sąvokas ir taiko jas stačiųjų trikampių elementams skaičiuoti.	Formuluoja pagrindinius trigonometrijos teiginius ir pritaiko juos trikampių elementams ir plotams skaičiuoti.	Formuluoja ir įrodinėja pagrindinius trigonometrijos teiginius ir taiko juos įvairioms problemoms spręsti.
Nesudėtingais atvejais geba išmatuoti ir apskaičiuoti ilgius, perimetrus, kampus; plotus, kūnų tūrius ir paviršiaus plotus.	Tinkamai pasirenka matavimo įrankius, vienetus ir metodus atstumui, plotui ar tūriui matuoti; taiko šiuos savo gebėjimus spręsdami praktinius ir nesudėtingus teorinius uždavinius.	Tiria įvairias problemas, susijusias su ilgiais, plotais ir tūriais.
UŽDUOČIŲ PAVYZDŽIAI		
Išvardykite keturkampius, kurių visi kampai tarpusavyje lygūs.	Kaip vadinami keturkampiai, kurių visos kraštinės yra lygios?	
Naudodami veidrodį ar lankstydami popierių raskite statmenį, dalijantį atkarpą pusiau.	Skriestuvu ir liniuote nubraižykite šių dydžių kampus: 90°, 30°, 60°, 45°, 120°, 15°.	Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi jo kraštinės ir vienas kampas.
Apskaičiuokite kampus x ir y: x, y, 130°	Į apskritimą įbrėžtojo keturkampio $ABCD$ kampas A lygus 70°. Raskite kampo C dydį.	Du apskritimai liečia vienas kitą taške A, jų bendra liestinė liečia apskritimus atitinkamai taškuose B ir C. Apskaičiuokite kampo BAC dydį.
Apskaičiuokite stulpo aukštį, jei jo šešėlio ilgis yra 12,5 m, o 1 m ilgio lazdos šešėlio ilgis yra 1,1 m.	Kaip galite apskaičiuoti upės plotį jos neperplaukdami?	Švyturio prožektoriaus spindulys krenta į laivo denį, esantį 12 m virš jūros lygio, 2° kampu. Prožektorius yra 105 m virš jūros lygio. Saugumo sumetimais laivas turėtų plaukti ne arčiau kaip 3,5 km nuo švyturio. Ar laivas yra pavojingoje zonoje?
Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio 1,2 × 3,4 × 7,7 paviršiaus plotą ir tūrį.	Iškilojo keturkampio plotas yra 12 cm^2. Apskaičiuokite plotą keturkampio, gauto sujungus jo kraštinių vidurio taškus.	Keturkampio kraštinių vidurio taškai paeiliui sujungti vienas su kitu. Įrodykite, kad gauta figūra yra lygiagretainis.

1	2	3
V. STATISTIKA IR TIKIMYBĖS		
Surenka duomenis ir juos sutvarko; randa duomenų centrą.	Savarankiškai surenka ir sutvarko duomenis; aprašo ir interpretuoja rezultatus; apibūdina imtis bei palygina jas pagal jų centrus; suvokia koreliacijos idėją.	Kritiškai vertina duomenis (patikimumą ir reprezentatyvumą); palygina duomenis iš skirtingų šaltinių.
Aiškina paprasčiausias sąvokas (imtis, diagrama); skaito ir aiškina nesudėtingus grafikus.	Aptardami metodus ir rezultatus vartoja tinkamą kalbą, pasirenka tinkamą duomenų vaizdavimo būdą.	Vertina samprotavimus, pagrįstus duomenų analize; daro išvadas, paremtas duomenų analize, ir jas argumentuoja.
Paprastais atvejais numato, ar įvykis įvyksta dažniau negu kiti; teisingai aiškina būdingiausius įprastinės kalbos posakius apie atsitiktinumus; numato galimas situacijų baigtis ir aiškina savo mąstymą.	Paprastais atvejais naudojasi statistiniu ir klasikiniu tikimybės apibrėžimais bei pagrindinėmis tikimybės savybėmis; teisingai aiškina nepriklausomumo sąvoką; skaičiuoja ar vertina tikimybes nesudėtingose žaidybinėse situacijose.	Skaičiuoja ir vertina tikimybes sudėtingesnėse žaidybinėse ir gyvenimiškose situacijose; suvokia koreliacijos sąvoką; supranta tikimybinio modeliavimo idėją.
UŽDUOČIŲ PAVYZDŽIAI		
Sakoma, kad autoįvykio metu neprisisegus saugos diržais tikimybė žūti padidėja penkis kartus. Paaiškinkite, kaip suprasti šį teiginį.		
Metant monetą tikimybė iškristi skaičiui yra viena antroji. Jūs metate monetą du kartus. Ar būtinai visada iškris ir herbas, ir skaičius?		
Apskaičiuokite savo bendraklasių vidutinį amžių, ūgį, svorį.	Du šauliai šauna į taikinį. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė yra 0,4, antrojo — 0,6. Raskite tikimybę, kad jie abu pataikys į taikinį.	Metami du lošimo kauliukai. Apskaičiuokite tikimybę, kad iškritusių akučių suma būtų lygi 5.
	Ištirkite, kiek laiko per dieną (savaitę) vidutiniškai jūsų bendraklasiai žiūri Lietuvos televizijos laidas. Pavaizduokite informaciją grafiškai. Išsiaiškinkite, ar yra skirtumų tarp berniukų ir mergaičių pomėgių.	Sudarykite apklausos lapą ir atlikite tyrimą tema *Mano bendraklasių laisvalaikio pomėgiai.* Pateikite statistinę ataskaitą.
		Savo klasės pavyzdžiu analizuokite hipotezę *Moksleivių matematikos ir fizikos trimestro pažymiai yra tarpusavyje koreliuoti.*

2. BENDROJI MATEMATIKOS PROGRAMA

Dalyko paskirtis

Matematika — sudėtinga ir daugiaplanė žmogaus intelektualios veiklos sritis. Ypač svarbūs šie jos aspektai. *Matematika yra*:

- mokslo, technologijos ir kasdieninio žmogaus gyvenimo įrankis, galinga patirties analizės priemonė;
- svarbi bendrosios žmonijos kultūros dalis, kultūros šaltinis;
- sudėtinė šiuolaikinės bendravimo kalbos dalis, naudojama tiksliai informacijai perduoti.

Matematika, kaip žmogaus protinės veiklos išraiška, atspindi aktyvų užsibrėžtų tikslų siekimą, kontempliatyvų mąstymą ir estetinio tobulumo troškimą. Jos pagrindiniai elementai yra logika ir intuicija, analizė ir sintezė, bendrumas ir atskirumas. Matematika siekia šių antitezių sujungimo, ir tuo ji ypač vertinga asmenybės ugdymui.

Matematikos, kaip mokomojo dalyko, paskirtis yra dvejopa. Pirma, ji turi *garantuoti visų visuomenės narių matematinį raštingumą*. Šis suprantamas plačiau nei vien tik paprasčiausias mokėjimas skaičiuoti. Matematinis raštingumas — tai gebėjimas atlikti būtiniausius aritmetinius, geometrinius, statistinius skaičiavimus, naudotis skaitmenine, simboline bei grafine informacija, skaičiuokliais. Antra, mokyklinė matematika *kiekvienam individui turi sudaryti galimybę kuo plačiau ugdyti savo matematinius gabumus.*

Tikslai ir uždaviniai

Matematikos mokymas teikia dideles asmenybės ugdymo ir lavinimo galimybes. Visapusiškas šiuolaikinio žmogaus mąstymo ugdymas neįmanomas be tam tikro *loginės kultūros* formavimo. Logika yra universalus mąstymo įrankis. Todėl mokant matematikos reikia pratinti teisingai atlikti loginį struktūrizavimą, logiškai svarstant gauti išvadas iš žinomų faktų, atskirti žinomą nuo nežinomo, įrodytą nuo neįrodyto, analizuoti, argumentuoti, klasifikuoti, kelti hipotezes, jas paneigti arba įrodyti, naudotis analogijomis.

Matematinių uždavinių sprendimas turi tobulinti ne tik racionalaus mąstymo ir minčių reiškimo įgūdžius, bet ir *intuiciją* — gebėjimą numatyti rezultatą bei nuspėti sprendimo kelią. Būtent intuicija paruošia dirvą logikai. Matematika turi žadinti vaizduotę. Mokiniams ji yra natūralus kelias į pirmuosius kūrybos bandymus, kelias į mokslinį pasaulėvaizdį.

Matematika gali ir turi daug prisidėti ne tik prie bendros asmenybės raidos, bet ir prie *charakterio bei moralinių nuostatų* formavimo. Norint išspręsti matematinį uždavinį reikia pastangų, ieškojimų, kartais — bendro darbo su kitais moksleiviais. Antra vertus, yra objektyvių rezultatų teisingumo ir sprendimo pagrįstumo kriterijų, todėl klaidų nuslėpti neįmanoma. Matematika gali padėti formuotis intelektualiam sąžiningumui, objektyvumui, atkaklumui. Ji turėtų ugdyti sistemingo ir kruopštaus darbo, tarpusavio pagalbos, vienas kito sugebėjimų įvertinimo bei panaudojimo ir kitokio bendradarbiavimo įgūdžius.

Matematika turėtų prisidėti ir prie *estetinio pasaulio suvokimo* tobulinimo. Mokant matematikos reikia, kad moksleiviai patirtų džiaugsmą rasdami gražią nelauktą idėją, rezultatą ar matematinio uždavinio sprendimą. Matematikai būdingos specifinės pasaulio estetinio suvokimo formos — abstraktūs objektai ir sąryšiai, loginės konstrukcijos.

Pagaliau būtina nuolat pabrėžti matematikos *praktinę, utilitarinę vertę*. Mokyklinis matematinis švietimas turi garantuoti, kad mokiniai sąmoningai ir tvirtai įsisavintų sistemą praktinių matematinių žinių ir įgūdžių, būtinų kasdieniniame gyvenime bei pakankamų tiek mokantis gretimų dalykų, tiek ir tolesnėms studijoms ar darbinei veiklai.

Bendrieji matematikos mokymo mokykloje tikslai:

- siekti, kad mokiniai įgytų tuos mąstymo ir veiklos elementus, kurie būdingi matematinei žmonijos kultūros šakai ir kurie būtini harmoningos asmenybės raidai bei visaverčiam gyvenimui šiuolaikiniame pasaulyje;
- siekti sudominti moksleivius matematika ir padėti kiekvienam jų tobulinti savo matematinius gabumus.

Bendrieji tikslai ir praktiniai visuomenės poreikiai nulemia *bendruosius matematikos mokymo uždavinius*. Jie dvejopi: vieni susiję su žiniomis, mokėjimais, įgūdžiais ir gebėjimais, kiti — nuostatomis, vertybėmis ir orientacijomis.

Bendrieji uždaviniai, susiję su mokinių žiniomis, mokėjimais, įgūdžiais ir gebėjimais:

- išmokyti naudotis matematiniu žodynu ir simboliais taip, kad mokiniai gebėtų aprašyti matematinius objektus ir procedūras, atpažinti ekvivalentus, reikšti mintis ir diskutuoti matematiniais klausimais;
- išmokyti atlikti standartines operacijas, tokias kaip matavimai, skaičiavimai, grafikų braižymas, matematinių objektų transformavimas, apytikslis atsakymo prognozavimas, duomenų apdorojimas, matematinių objektų palyginimas ir klasifikavimas;

- išmokyti matematiškai tirti problemas ar situacijas ir rasti racionalius sprendimus, t. y. išmokyti formuluoti problemą, aiškintis jos esmę, rasti sprendimo kelią, jį realizuoti, numatyti galimus rezultatus atlikus vienokį ar kitokį algoritmą, patikrinti gautus rezultatus ir juos interpretuoti pradinės problemos terminais, išsiaiškinti, ar rezultatai pakankamai svarūs;
- išmokyti matematiškai mąstyti, t. y. išmokyti kurti naujas sąvokas ir žodyną, konstruoti algoritmus, apibendrinti sąvokas ir rezultatus, argumentuoti bei įrodinėti.

Bendrieji uždaviniai, susiję su nuostatomis, vertybėmis ir orientacijomis:

- formuoti mokinių teigiamas nuostatas į matematiką, mokslą ir technologiją, sudominti juos šitų sričių pasiekimais;
- propaguoti matematines, mokslines bei technologines profesijas, pabrėžti matematikos, mokslo ir technologijų svarbą profesinei veiklai;
- skatinti studijuoti ir naudoti matematiką tradiciškai mažiau šią sritį naudojančių gyventojų grupių atstovus;
- skatinti mokslinį ir matematinį mąstymo pobūdį, atvirumą, objektyvumą, pakantumą nežinomybei, išradingumą, žinių troškimą.

Didaktinės nuostatos

Matematikai mokyti gali būti sėkmingai naudojama dauguma bendrosios pedagogikos metodų, tačiau jie turi būti koreguojami, nes matematinis švietimas turi specifinių ypatumų, į kuriuos būtina atsižvelgti.

Matematikos turinys gali būti perteiktas faktiniu, pavaizduotu arba įsivaizduotu eksperimentu. Gali būti naudojamas tiek mokinio savarankiškas tyrinėjimas gerai organizuotoje mokymo aplinkoje, tiek mokytojo aiškinimas ir iliustravimas. Visais atvejais labai svarbu remtis pačių mokinių kūrybinėmis galiomis. Tuo tikslu jiems turi būti sudaryta pakankamai galimybių savarankiškiems eksperimentams ir tyrinėjimams.

Gilindamasis į abstraktų matematikos pasaulį kiekvienas mokinys susiduria su savitais (būdingais jam vienam) sunkumais. Įveikti juos gali padėti tik profesionalas, gerai įsigilinęs į matematikos mokymo metodiką ir konkretaus vaiko asmenybės ypatumus. Todėl pagrindinis vaidmuo mokant matematikos tenka mokytojui. Jis privalo sudaryti kiek galima geresnę mokymosi aplinką, reguliuoti mokymą, derinti įvairius mokymo metodus, kad visiems mokiniams būtų keliami tokie reikalavimai, kokius jie pajėgia įvykdyti.

Mokinys turi teisę rinktis: ar tenkintis tik kiekvienam būtinomis minimaliomis matematikos žiniomis (teikiant pirmenybę kitoms veiklos sferoms), ar gilintis į matematiką. Mokinio teisės pasirinkti savo tobulinimosi kelią gerbimas, mokinio asmenybės gerbimas bei gebėjimas jį sudominti, išklausyti, suprasti, jam aiškinti, mokėjimas spręsti sunkius uždavinius sudaro matematikos mokytojo profesionalumo pagrindą.

Matematikos mokymas būna efektyvus, kai jis įdomus, intriguojantis, teikiantis malonumą. Mokymas turi žadinti žinių troškimą, atitikti mokinio sugebėjimus ir remtis jo kasdieninio gyvenimo patyrimu. Mokinius reikia supažindinti su matematikos reikšme ir praktine nauda. Jie turi pakankamai dažnai patirti sėkmę savo matematinėje veikloje. Mokinių pasiekimų akcentavimas skatina jų teigiamą požiūrį ir į matematiką, ir į save.

Matematikos mokymas turi remtis nuolatine sąveika tiek su fizine, tiek su socialine mokinio aplinka. Tai skatina matematinių sąvokų formavimąsi ir įsitvirtinimą. Matematikos supratimui ypač padeda mokinio bendravimas su kitais žmonėmis ir manipuliavimas įvairia medžiaga nuolat besikeičiančiose mokomosiose situacijose. Puikias galimybes bendrauti teikia kooperatyvus mokymas nedidelėse grupėse. Medžiaga ir prietaisai turi būti naudojami siekiant vaizdžiai atrasti, ištirti ir suformuoti matematines idėjas. Technologinių prietaisų — skaičiuoklių ir kompiuterių — egzistavimas nesumenkina matematinio supratimo ir matematinių gebėjimų reikšmės. Kartu kai kurie įgūdžiai (kablelio vietos nustatymas, aproksimavimas, įvertinimas) naudojant skaičiuoklius ir kompiuterius turi būti dar labiau akcentuojami.

Sudėtinė matematikos mokymo dalis turi būti įvairių objektų, sąryšių, procesų, situacijų ir problemų matematinis tyrimas. Mokiniams reikėtų suteikti galimybę atrasti, sukonstruoti pavyzdžius ir kontrpavyzdžius bei aprašyti ir užkoduoti sąryšius. Mokant bet kurios matematikos temos jie turi naudotis jau išeita medžiaga ir sugalvoti bei spręsti uždavinius.

Mokiniai matematikos mokosi kalbėdami. Tinkamos kalbos vartojimas skatina mokymąsi. Kalba — kartu su simboliais ir grafinėmis priemonėmis — leidžia suformuluoti ir išreikšti matematines idėjas, ji yra tarsi tiltas tarp konkretaus ir abstraktaus. Svarbi (tiek mokytojams, tiek mokiniams) matematikos mokymo sudėtinė dalis — tinkamos matematikai kalbos ugdymas. Būtina, kad pats mokytojas gerai mokėtų vartoti kalbos stilius, būdingus visoms mokyklinės matematikos sritims. Mokymas bus efektyvesnis, kai mokinys galės kalbėti ir rašyti būdinga jo brandos lygiui kalba, nuolat pratinsis reikšti savo mintis ir žodžiu, ir raštu. Matematikos mokymas glaudžiai siejasi su bendru mokinio kalbos ugdymu, mokymu diskutuoti, argumentuoti. Rengdamas

individualiąsias mokymo programas mokytojas turi atsižvelgti į mokinių socialinius, kultūrinius ir lingvistinius skirtumus.

Mokant matematikos reikia atsižvelgti į asmenines savybes, intelektinį, fizinį ir socialinį brandumą. Labai skirtingai ir nevienodais tempais mokomasi šio dalyko, todėl mokymas turi kiek galima labiau atitikti mokinio lygį. Mokytojas turi atsižvelgti į žinias, įgytas už mokyklos ribų, taip pat ir namuose, ankstesnį vaikų patyrimą ir pasiekimus mokantis matematikos. Derindamiesi prie skirtingų lygių, pasitaikančių mokinių grupėse, mokytojai turi sudarinėti lanksčias, teikiančias daug keitimo galimybių individualiąsias mokymo programas. Nors pasirengimas atlikti naują užduotį ir priklauso nuo ankstesnių žinių bei supratimo, tai negali vienareikšmiškai sąlygoti algoritmo, pagal kurį turi būti mokomi matematikos visi mokiniai. Suprasti matematiką yra daug kelių.

Mokytojas turi ieškoti galimybių prisitaikyti prie moksleivio interesų ir poreikių. Jeigu tik įmanoma, mokymas turi eiti nuo konkretaus prie abstraktaus. Sąvokos turi būti nuosekliai formuojamos, fiksuojamos ir įtvirtinamos suteikiant mokiniui gausybę konkretaus patyrimo.

Žinių atgaminimo ir standartinių operacijų atlikimo automatiškumo reikia siekti tik tada, kai mokiniai medžiagą supranta pakankamai gerai. Įgūdžiai įtvirtinami kiek galima prasmingesne praktika ir nelabai nuobodžiomis treniruotėmis.

Ypatingą rūpestį ir atidžiausią dėmesį reikia skirti gabesniesiems matematikai mokiniams. Ypač svarbu užsiimti jų specifinių tiriamojo darbo ir mąstymo įgūdžių plėtojimu.

Šiuolaikiškam matematikos mokymui reikia nemažai mokymo priemonių, laboratorinių medžiagų ir įrangos. Geri modeliai, aparatai ir instrumentai leidžia mokiniams bandyti, tirti, suvokti. Reikalingas didelis įvairių pagalbinių demonstracinių objektų rinkinys visam mokymosi laikotarpiui. Mokomoji medžiaga turi būti parinkta taip, kad tiktų visiems, skatintų domėjimąsi matematika ir leistų savarankiškai „atrasti" matematinius sąryšius. Ir mokymo programa, ir mokymo priemonės turi atitikti mokinių interesus ir patyrimą. Mokymo procese reikėtų naudoti žemėlapius, autobusų ir traukinių tvarkaraščius ar kitą panašią vietinę medžiagą, artimiausios mokyklai aplinkos objektų, kuriuos būtų įdomu tyrinėti, sąrašą. Mokiniai turėtų būti aprūpinti darbo įrankiais, tinkančiais užduočiai atlikti.

Kišeniniai skaičiuokliai gali būti naudojami jau pradinėje mokykloje. Pagrindinėje mokykloje jie tampa būtina priemone, pagreitinančia nuobodžius skaičiavimus ir padedančia spręsti uždavinius, artimesnius realiam gyvenimui. Be to, naudojant skaičiuoklius daugiau laiko lieka metodų ir sąryšių esmei suprasti.

Kompiuteriai naudingi iliustruojant matematines sąlygas ir nagrinėjant matematinius sąryšius. Gal tik nepakankamas jų skaičius vidurinėse mokyklose bei mokymo metodikos stoka gali riboti jų dažnesnį taikymą visuose matematikos studijų etapuose.

Dalyko struktūra

Pradinės ir pagrindinės mokyklinės matematikos mokymo turinys sudaro vientisą *bazinį matematikos kursą*. Svarbiausias bazinio matematikos kurso tikslas — užtikrinti tam tikrą kiekvieno visuomenės nario matematinės kultūros lygį — matematinį raštingumą bei garantuoti visiems visuomenės nariams lygias teises įgyti minimalų matematinį išsilavinimą.

Bazinio matematikos kurso turinys patogumo dėlei suskirstytas į pagrindinius skyrius. Toks skirstymas leidžia tolygiau išdėstyti medžiagą rengiant mokymo planus, garantuoti nuoseklų naujų matematinių idėjų diegimą ir įtvirtinimą. Tačiau rengiant vadovėlius ir mokymo planus šių skyrių temos turi būti organiškai integruotos į vieningą bazinį matematikos kursą.

Pagrindiniai skyriai yra šie:
1. Problemų sprendimas (matematinis tyrimas).
2. Skaičiai ir skaičiavimai.
3. Matai ir matavimai.
4. Geometrija.
5. Algebra.
6. Sąryšiai ir funkcijos.
7. Statistika.
8. Ekonomikos elementai.
9. Informatikos elementai.

Trumpai apžvelgsime specifinius šių skyrių tikslus ir didaktines nuostatas.

1. Problemų sprendimas (matematinis tyrimas). Mokiniai dažnai susiduria su situacijomis, kuriose tinkamai atliktas matematinis tyrimas padeda rasti racionalų sprendimą. Išskirtini šie tyrimo proceso etapai:

- problemos, susietos su realiu gyvenimu ar kita konkrečia situacija, formulavimas ar išsiaiškinimas;
- problemos sprendimo arba duomenų rinkimo eksperimento metodo pasirinkimas bei plano sukūrimas ir apsvarstymas;
- standartinio ar specialiai konkrečiam atvejui sukurto sprendimo plano įgyvendinimas ir rezultatų patikrinimas;
- rezultatų interpretavimas pradinės problemos požiūriu ir jų pakankamumo bei pasirinkto sprendimo metodo efektyvumo įvertinimas;
- galimi konkretaus uždavinio ir jo sprendimo metodų apibendrinimai.

Jei mokinys pratinamas ieškoti ir formuluoti uždavinius, tai problemų sprendimas tampa matematikos naudojimo motyvu ir skatina jo kūrybinio mąstymo tobulėjimą. Tuo atveju, kai problemos yra labiau teorinio pobūdžio, mokiniui turi būti suteikiama galimybė eksperimentuoti ir ištirti sąryšius.

Mokiniai turi išmokti suformuluoti problemą žodžiu ir raštu. Ypatingą dėmesį reikia skirti žodinių praktinių uždavinių sprendimui (ypač aukštesnėse klasėse). Natūralia sprendimo dalimi turėtų būti apytiksliai galimų rezultatų įvertinimai. Mokiniai turi išmokti įvairiai pateikti sprendimo būdus, aiškiai ir suprantamai apipavidalinti sprendimą, įvertinti rezultato realumą bei pasirinkto sprendimo metodo efektyvumą ir prireikus jį keisti racionalesniu. Daugeliu atvejų problemų sprendimo ir matematinio tyrimo mokymą tikslinga integruoti su kitų matematikos temų mokymu.

2. Skaičiai ir skaičiavimai. Geras skaičiaus suvokimas yra viso tolesnio matematikos mokymo pagrindas, todėl skaičiaus sąvokos formavimui reikia skirti ypač daug dėmesio.

Mokiniai turi išmokti priskirti skaitines išraiškas kiekybiniams dydžiams, išmokti terminų ir simbolių, vartojamų lyginant skirtingus skaičius. Jie turi gerai įsisavinti dešimtainę skaičiavimo sistemą. Ypatingas dėmesys turi būti skiriamas praktiniam uždavinių sprendimui.

Pagrindinėje mokykloje mokinys privalo išmokti gerai skaičiuoti skaičiuokliu ir be jo. Mokiniai turi būti pratinami skaičiuoti mintinai ir atlikti keturis pagrindinius veiksmus su keliaženkliais skaičiais, be to, jie turi būti mokomi iš anksto apytiksliai įvertinti sudėtingų skaitinių reiškinių reikšmes. Tik geri mintino skaičiavimo įgūdžiai ir sugebėjimas numatyti atsakymą sudaro galimybę pasiekti optimalių rezultatų skaičiuojant raštu ir skaičiuokliu. Kai įmanoma, skaičiavimai turi būti siejami su praktiniais uždaviniais.

Sąryšiams aprašyti įvairiose praktinės žmonių veiklos srityse naudojama procentų terminija. Todėl mokiniai turi išsiugdyti aiškų jos supratimą ir mokėjimą ja naudotis. Labai svarbu atskleisti ryšius tarp procentų ir trupmenų bei tarp procentų ir apytikslių vertinimų. Šią matematikos mokymo tematiką galima integruoti su ekonomikos elementais ir statistika.

Detalizuojant šio skyriaus turinį jis bus papildomai išskaidytas į tris poskyrius: *skaičiai, skaičiavimai, procentai.*

3. Matai ir matavimai. Mokant matavimų ypač pravartu remtis mokinio asmeniniu patyrimu bei integruoti mokymąsi su kitomis matematikos temomis ir mokomaisiais dalykais.

Mokiniai privalo mokėti atlikti ilgio, ploto, tūrio, masės, tankio ir greičio matavimus, gebėti naudotis žemėlapiais ir darbo brėžiniais, mokėti įvertinti matavimo paklaidas.

4. Geometrija. Geometrija — reikšminga matematikos mokymosi sritis ir svarbus aplinkos aprašymo įrankis. Ji glaudžiai susijusi su braižyba bei kita kūrybine veikla ir teikia daug galimybių bandymams bei tyrinėjimui. Ši studijų sritis ypač tinka padėti mokiniams suvokti tikslaus, nuoseklaus ir kruopštaus darbo reikšmę.

Geometrijos mokymas turi būti konkretus ir praktiškas. Užduotys imamos iš artimiausios mokinių aplinkos. Dėmesys koncentruojamas į paprastas ir dažnai pasitaikančias dvimates ir trimates figūras. Mokiniai supažindinami su jų savybėmis ir būtina terminija. Jie pratinami daryti eskizus ir brėžinius ranka, mokomi braižyti ir konstruoti naudojant paprasčiausius braižymo įrankius.

Mokydamiesi geometrijos mokiniai turėtų atlikti tyrimus, formuluoti hipotezes ir jas tikrinti. Esant galimybei reikėtų naudoti skaičiuoklius ir kompiuterius (pavyzdžiui, skaičiavimams ir brėžimui).

Atsižvelgiant į mokinių sugebėjimus galima supažindinti su geometrija, kaip užbaigtos matematinės teorijos pavyzdžiu. Siekiant šio tikslo reikia kruopščiai nagrinėti geometrijos teoremas ir jų įrodymus.

5. Algebra. Algebra yra ypač svarbi matematikos struktūrizavimui ir formalizavimui. Algebros žinios būtinos norint pasinaudoti informacija, užrašyta formulėmis. Be to, algebros reikia tolesnėms matematikos studijoms. Visi mokiniai turi susipažinti su šiuo dalyku, tačiau mokytojas privalo atsižvelgti į kiekvieno mokinio galimybes. Mokiniams būtina praktikuotis sudaryti konkrečių situacijų lygtis ir nelygybes.

Skaičiuoklis yra naudingas sprendžiant lygtis bandymais arba artutiniais metodais.

6. Sąryšiai ir funkcijos. Funkcinės priklausomybės ir sąryšio sąvokos matematikoje yra vienos iš svarbiausių. Todėl mokiniai turi būti nuosekliai pratinami nustatyti dydžių, esančių jų aplinkoje, tarpusavio priklausomybę. Pagrindinės sąvokos vartojamos tik jas aptarus ir argumentavus įvairiais pavyzdžiais. Ypač svarbu, kad mokiniai aiškiai suprastų, kas yra kintamieji ir kas yra funkcijos. Pagrindinėje mokykloje funkcijos sąvoka pamažu formalizuojama.

7. Statistika. Šiuolaikinės visuomenės gyvenime plačiai naudojama įvairių rūšių statistinė informacija. Ji būtina planavimui pagrįsti ir sprendimams paremti. Norint suprasti tokią informaciją ir mokėti ją įvertinti būtina žinoti pagrindines tikimybių teorijos ir statistikos sąvokas bei metodus ir turėti patyrimo analitiškai vertinti statistinę medžiagą.

Mokiniai mokomi naudotis paprasčiausiais statistikos metodais renkant, sisteminant ir apdorojant informaciją. Duomenys gali būti gaunami iš mokinį supančios aplinkos. Mokiniai pratinami suprasti, analizuoti ir kritiškai vertinti informaciją, pateiktą įvairiose lentelėse, diagramose, grafikuose.

Kad mokiniai geriau suprastų statistinius metodus, susipažįstama su pagrindinėmis kombinatorikos ir tikimybių teorijos sąvokomis.

8. Ekonomikos elementai. Mokinys turi išmokti atlikti paprasčiausius skaičiavimus, susijusius su pirkimu, pardavimu, mokesčiais, bankų ir pašto operacijomis, draudimu, atlyginimu už darbą, asmeniniu biudžetu, valiutų keitimu, suprasti, kaip valstybės biudžetas siejasi su asmeniniu biudžetu. Todėl užduotys parenkamos iš mokinių aplinkos. Mokinys turi suprasti, kaip reikia tvarkyti ekonominius resursus. Ši sritis gali būti derinama su visuomenės mokslų studijomis ir namų ūkio ekonomika.

9. Informatikos elementai. Kompiuterinė technologija naudojama taikomojoje ir teorinėje matematikoje. Tai sąlygoja šio skyriaus turinį ir metodus.

Mokydamiesi matematikos mokiniai turi susipažinti su kompiuterine ir informacine technologija. Geriausiai tai atlikti demonstruojant, kaip kompiuteriais sprendžiami uždaviniai, kurių sprendimas kitais būdais sunkus arba neįmanomas. Matematinis kompiuterių pažinimas remiasi algoritmo sąvoka ir glaudžiai siejasi su problemų sprendimo mokymu.

Mokiniai turi suvokti, kad kompiuteris yra žmogaus kontroliuojamas prietaisas. Labai naudinga priemonė pažįstant kompiuterius yra skaičiuoklis.

Pastaba. Skirstant bazinį matematikos kursą klasėms vartojama tokia skyrių (poskyrių) numeracija:

1. Problemų sprendimas (matematinis tyrimas).
2. Skaičiai ir skaičiavimai.
   2.1. Skaičiai.
   2.2. Skaičiavimai.
   2.3. Procentai.
3. Matai ir matavimai.
4. Geometrija.
5. Algebra.
6. Sąryšiai ir funkcijos.
7. Statistika.
8. Ekonomikos elementai.
9. Informatikos elementai.

Pagrindinės mokyklos programa pateikta vienoje lentelėje. Taip surašyta programa patogu naudotis, nes iškart matoma 5–10 klasių bazinio matematikos kurso pagrindinių skyrių visuma.

Pastaba. Matematikos programos autorių buvo numatyta tiesinę funkciją nagrinėti 8 klasėje, o atvirkštinį proporcingumą — 9 klasėje. Pasitarus su programos autoriais ir ekspertais buvo nutarta 8 klasėje nagrinėti tiesioginį ir atvirkštinį proporcingumą, o 9 klasėje — funkcijas $y = kx$, $y = k/x$, $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$ (kvadratinė funkcija iš 10 klasės kurso perkelta į 9 klasės kursą). Taip pat iš 10 į 9 klasės kursą nutarta perkelti: kvadratinių lygčių sprendimą algebriniu būdu, klasikinį tikimybės apibrėžimą, pagrindines tikimybės savybes, kombinatorinę daugybos taisyklę.

Klasė	5 kl.	6 kl.	7 kl.	8 kl.	9 kl.	10 kl.
1. Problemų sprendimas	Uždavinių, susietų su mokinių aplinka ir mokykloje mokomais dalykais, sprendimas: mokyti identifikuoti ir gauti informaciją, reikalingą problemai spręsti; pratinti aiškinti įvairias gyvenimiškas situacijas matematiškai; mokyti argumentuoti sprendimą.	Uždavinių, susietų su mokinių aplinka ir mokykloje mokomais dalykais, sprendimas: mokyti aprašyti įvairias situacijas matematine kalba naudojant simbolius ir diagramas; mokyti bent iš dalies pagrįsti uždavinių ir problemų sprendimus; pratinti apibendrinti; formuluoti paprastas hipotezes.	Uždavinių, susietų su mokomaisiais dalykais ir įvairiomis gyvenimo sritimis, sprendimas, tinkamų priemonių ir matematinių metodų užduotims atlikti pasirinkimas, kritiškas informacijos vertinimas, planingas darbas, argumentavimas: mokyti suskaidyti užduotį į smulkesnes, lengviau įveikiamas dalis; mokyti naudoti įvairių formų matematinę informaciją; pratinti daryti apibendrinimus ir juos tikrinti.	Uždavinių, susietų su mokomaisiais dalykais ir įvairiomis visuomenės gyvenimo sritimis, sprendimas, užduoties skaidymas, informacijos tikrinimas, trūkstamos informacijos paieška, „bandymų ir klaidų“ metodo naudojimas: mokyti mokinius kelti prasmingus (duotame kontekste) klausimus ir problemas; pratinti kritiškai vertinti informacijos pateikimą; pratinti daryti pagrįstus apibendrinimus; mokyti argumentuoti.	Praktinių ir teorinių problemų sprendimas, naujų sprendimo būdų paieška ir alternatyvių matematinių metodų naudojimas, užduoties skaidymas, metodiškas darbas ir kritiškas informacijos naudojimas, nuoseklus matematinis mąstymas: mokyti įveikti sprendimo sunkumus keičiant sprendimo būdą; mokyti konstruktyviai nagrinėti modelius ir sprendimus; mokyti argumentuoti; pratinti mokinius pastebėti nelogiškumus.	Praktinių ir teorinių problemų sprendimas, matematinių uždučių skaidymas ir apibendrinimas, detalaus darbo plano parengimas ir įvykdymas, informacijos ir rezultatų tikrinimas, naujų objektų apibrėžimas, teiginių įrodymas ir paneigimas, kontrpavyzdžių naudojimas, loginių samprotavimų grandinių (pvz., naudojant „jei..., tai...“ pavidalo sakinius) konstravimas: mokyti mokinius aiškinti darbo eigą argumentuojant galimus pasirinkimus, pabrėžti kontrpavyzdžių svarbą paneigiant apibendrinimus ar hipotezes.
2.1. Skaičiai	Skaičiai nuo nulio iki milijono, dešimtainių trupmenų tvarka, paprastųjų trupmenų tvarka, paprastųjų trupmenų ir dešimtainių trupmenų sąryšis: mokyti perskaityti ir užrašyti skaičius bei grupuoti didelių skaičių skaitmenis; mokyti palyginti trupmenas; mokyti versti paprastąsias trupmenas dešimtainėmis ir dešimtaines paprastosiomis.	Pirminiai ir sudėtiniai skaičiai; paprasčiausi skaičių dalumo požymiai; tiegiamieji ir neigiamieji skaičiai, skaičiaus modulio ir skaičių bendro kartotinio sąvokos: mokyti konkrečiuose sąryšiuose naudoti neigiamuosius skaičius.	Skaičiaus sąvokos apžvalga (lyginiai, nelyginiai, pirminiai ir sudėtiniai skaičiai, dešimtainės trupmenos ir jų apvalinimas, teigiamieji ir neigiamieji skaičiai, natūralieji, sveikieji, racionalieji ir iracionalieji, realieji skaičiai): sistemingiau supažindinti mokinius su pirminiais ir sudėtiniais skaičiais, bendrais dalikliais ir kartotiniais; supažindinti juos su skaičių tiesės struktūra ir skaičių tvarka, skaičiaus modulio sąvoka; mokyti apvalinti ir priartinti skaičius.	Su skaičių tiese susijusių sąvokų įtvirtinimas ir įprasminimas.		
2.2. Skaičiavimai	Paprasčiausių dešimtainių trupmenų daugyba ir dalyba, trupmenų sudėtis ir atimtis, trupmenos ir natūraliojo skaičiaus dauginimas, paprasčiausi skaitmeniniai reiškiniai, veiksmų tvarka, skliaustai; mintinas skaičiavimas akcentuojant išankstinį daugybos rezultato vertinimą: toliau mokyti daugybos ir dalybos savybių ir jų pritaikymo; siekti, kad mokiniai lengvai daugintų ir dalytų iš vienaženklio skaičiaus, suprastų veiksmų su daugiaženkliais skaičiais algoritmus; supažindinti su paprasčiausių trupmenų sudėtimi, atimtimi ir dauginimu iš natūraliųjų skaičių; mokyti apskaičiuoti skaitmeninius reiškinius.	Keturi aritmetiniai veiksmai su nesudėtingomis dešimtainėmis trupmenomis, trupmenų sudėtis ir atimtis, trupmenų dauginimas iš natūraliųjų skaičių, dalyba iš dviženklio ir triženklio daliklio, mintinas skaičiavimas, orientuotas į visų aritmetinių veiksmų rezultatų išankstinį vertinimą: sisteminti moksleivių žinias apie aritmetinius veiksmus bei jų savybes ir mokyti juos tuos veiksmus teisingai panaudoti bei interpretuoti; mokyti prastinti ir neformaliai bendravardiklinti trupmenas; siekti, kad moksleiviai lengvai dalytų iš dviženklio skaičiaus be skaičiuoklio.	Aritmetinių veiksmų su natūraliaisiais skaičiais, nuliu ir nesudėtingomis dešimtainėmis trupmenomis įgūdžių įtvirtinimas, aritmetiniai veiksmai su trupmenomis, skaičiavimai su skaičiumi π, veiksmai su neigiamaisiais skaičiais, įvadas į realiųjų skaičių aritmetiką, dešimties laipsniai, kėlimas kvadratu ir kvadratinės šaknies traukimas: ruošti mokinius skaičiavimams realiųjų skaičių aibėje; supažindinti su apytiksliu skaičiavimu; mokyti naudoti skaičiuoklius.	Aritmetiniai veiksmai realiųjų skaičių aibėje, kėlimas sveikuoju laipsniu, kvadratinės šaknies traukimas, apytikslis skaičiavimas, išankstinis rezultato įvertinimas, skaičiavimas skaičiuokliu: formuoti ir įtvirtinti skaičiavimo įgūdžius.		Apytikslis skaičiavimas; išankstinis rezultato įvertinimas; skaičiavimas skaičiuokliu.

Klasė	5 kl.	6 kl.	7 kl.	8 kl.	9 kl.	10 kl.
2.3. Procentai	Procento sąvoka: apibrėžti procentą kaip šimtąją dalį; mokyti spręsti paprasčiausius uždavinius.	Procentų skaičiavimas: mokyti spręsti paprasčiausius uždavinius, supažindinti su atvirkštiniu procentų uždaviniu.	Procentų ir paprastųjų bei dešimtainių trupmenų sąryšis, veiksmai su procentais, promilės (tūkstantosios): mokyti spręsti tiesioginius ir paprasčiausius atvirkštinius procentų uždavinius.	2–3 žingsnių procentų uždaviniai.	Paprastieji procentai. Pastoviųjų palūkanų paskolos.	Sudėtiniai procentai. Kintamųjų palūkanų paskolos.
3. Matai ir matavimai	Tolesnis praktikavimasis versti ilgio, ploto, masės ir tūrio vienetus; laiko skaičiavimai, susieti su laikrodžiu ir kalendoriumi; užsieniniai pinigai; įvadas į mastelį.	Tolesnis praktikavimasis su matavimo vienetais, tūrio skaičiavimas, sąryšis tarp dm^3 ir litrų, įvadas į išvestinius matavimo vienetus.	Įvairūs ilgio, kampo dydžio, ploto ir tūrio matavimo ir skaičiavimo uždaviniai. Uždaviniai su išvestiniais matavimo vienetais.	Uždaviniai su ilgio, ploto, tūrio, masės ir tankio matavimo vienetais; uždaviniai su masteliu (žemėlapiai, darbo brėžiniai, modeliai); matavimai ir matavimo paklaidos; reikšminiai skaitmenys; įvairių matavimo vienetų palyginimas.	Uždaviniai su masės ir tankio vienetais, matavimo tikslumo nustatymas, matavimo prietaisų matavimo tikslumas; reikšminiai skaitmenys; matavimo vienetų palyginimas; pažintis su SI matų sistema.	Tolesnis uždavinių su matavimo vienetais ir matavimo tikslumu sprendimas (skyriaus sisteminimas).
4. Geometrija	Apskritimas, spindulys, skersmuo; supažindinimas su fundamentaliomis geometrijos sąvokomis – tašku, atkarpa, tiese, kreive, spinduliu, kampu; stačiakampio, kvadrato, trikampio ir apskritimo braižymas. Stačiojo trikampio plotas.	Skritulys, apskritimas, apskritimo ilgis ir skritulio plotas; supažindinimas su trimatėmis figūromis: stačiąja prizme, ritiniu. Trikampio ir lygiagretainio plotai.	Kampo, pusiaukampinės, statmens, lygiagretės piešimas, brėžimas ir konstravimas; trikampio ir keturkampio perimetras ir plotas; užduotys su trikampiais, keturkampiais ir apskritimais; lygiagretainis; trapecija; geometrinio teiginio samprata, teoremos apie trikampio ir keturkampio kampus.	Sudėtingesnės brėžimo ir konstravimo užduotys; įvadas į panašumą ir mastelį; simetrija (atspindys tiesės atžvilgiu, atspindys taško atžvilgiu); figūrų didinimas ir mažinimas. Stačiosios prizmės ir ritinio tūris. Pitagoro teorema.	Apskritimo geometrija: stygos, liestinės, išpjovos sąvokos, išpjovos ir nuopjovos plotas; panašumas ir mastelis (trikampių panašumas, žemėlapiai ir darbo brėžiniai); taisyklingieji daugiakampiai. Rutulio, piramidės ir kūgio tūrių ir paviršių plotų formulės.	Trigonometriniai santykiai: smailiojo kampo sinusas, kosinusas ir tangentas; kampų nuo 0° iki 180° trigonometrinės funkcijos; formulė $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ir paprasčiausi trigonometriniai sąryšiai; sinusų ir kosinusų teoremos; trigonometrijos naudojimas figūrų plotams skaičiuoti. Nupjautinės piramidės ir nupjautinio kūgio tūris.
5. Algebra	Paprasčiausių lygčių ir nelygybių sudarymas ir sprendimas; paprasčiausi algebriniai reiškiniai ir formulės (paprasti pratimai su raidėmis, kaip simboliais, žyminčiais skaičius, ir raidžių keitimas skaičiais), veiksmų tvarka, skliaustai.	Lygčių, nelygybių, reiškinių ir formulių įtvirtinimas.	Reiškinių su skliaustais pertvarkymas ir prastinimas; reiškinių reikšmių skaičiavimas pakeičiant raides skaičiais; tiesinės lygtys su vienu nežinomuoju.	Reiškinių pertvarkymas taikant formules $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Tiesinių lygčių su vienu nežinomuoju sudarymas ir sprendimas; tiesinės nelygybės.	Tiesinių lygčių sistemų su dviem nežinomaisiais sudarymas ir sprendimas akcentuojant grafinį metodą; kvadratinių lygčių sprendimas algebriniu, grafiniu arba artutiniu būdais, bei išskiriant pilnąjį kvadratą.	Kvadratinės nelygybės; paprasčiausios lygčių sistemos su viena netiesine lygtimi.

Klasė	5 kl.	6 kl.	7 kl.	8 kl.	9 kl.	10 kl.
6. Sąryšiai ir funkcijos	Dėsningumo ir funkcijos sąvokų propedeutika. Nagrinėjant įvairius uždavinius ir pavyzdžius akcentuoti egzistuojančius dėsningumus ir sąryšius.	Įvadas į funkcijos sąvoką per praktinius pavyzdžius; plokštumos koordinačių sistema, pirmasis kvadrantas, grafinis sąryšių vaizdavimas.	Funkcijos ir jos grafiko sąvokų formavimas.	Funkcijos ir jos grafiko sąvokų formavimas; plokštumos koordinačių sistema; kintamojo sąvoka; tiesioginis ir atvirkštinis proporcingumas.	Grafinis funkcijos vaizdavimas; funkcija $y = kx$; funkcija $y = k/x$; tiesinė funkcija; kvadratinė funkcija ir jos grafikas.	Kvadratinės funkcijos kitimas; kvadratinės funkcijos ekstremumai; funkcijos $y = \|f(x)\|$ grafiko ypatumai.
7. Statistika	Duomenų rinkimas; stulpelinės diagramos ir histogramos; duomenų interpretavimo pratimai; įvykių tikėtinumo palyginimas („labiau tikėtinas“, „mažiau tikėtinas“ ir pan.).	Duomenų rinkimas ir klasifikavimas; praktikavimasis aiškinant sugrupuotų duomenų lenteles ir diagramas; nesudėtingi vidurkio skaičiavimo atvejai; visų galimų eksperimento baigčių išvardijimo pratimai.	Eksperimento planavimas ir atlikimas, duomenų rinkimas, sisteminimas ir grafinis iliustravimas; skritulinė diagrama.	Sudėtingesnių eksperimentų planavimas, atlikimas ir įvairus grafinis pateikimas; dažnumai ir dažnumų lentelės; vidurkių skaičiavimas; medianos sąvoka; duomenų interpretavimas; statistinės medžiagos vertinimas; įvadas į tikimybės sąvoką per praktinius eksperimentus; subjektyvaus atskirų įvykių tikimybių vertinimo ir tokio vertinimo argumentavimo pratimai.	Eksperimentų planavimo ir atlikimo pratimai; koreliacijos idėjos samprata ir panaudojimas; prognozavimo samprata; lygiai galimi įvykiai; klasikinis tikimybės apibrėžimas; pagrindinės tikimybės savybės; nepriklausomi bandymai ir įvykio tikimybė; kombinatorinė daugybos taisyklė.	Eksperimentų planavimo ir atlikimo pratimai; kombinatorikos elementai (kėliniai, gretiniai, deriniai); matematinė viltis.
8. Ekonomikos elementai	Taupymas ir paskolos, metiniai procentai; uždaviniai, susieti su darbine veikla arba pramogomis.	Pirkimas ir pardavimas, pelnas ir nuostoliai, nuolaida.	Darbo užmokesčio skaičiavimas. taupymas ir indėliai. Pajamų ir socialinio draudimo mokesčiai. Užsienio valiutų kursai.	Asmeninė apskaita ir šeimos biudžetas (pajamos, išlaidos, namų ūkio apskaita). Uždaviniai, susieti su gamyba ir prekių mainais (savikaina, antkainiai, pajamos, pelnas, nuostoliai, nuolaida).	Paskolos; susipažinimas su vertybiniais popieriais (obligacijos, akcijos, vekseliai); pirkimas išsimokėtinai; pridėtosios vertės ir pelno mokesčiai; uždaviniai, susieti su gamyba ir prekių mainais.	Įvairios draudimo formos; mokesčiai (akcizas, netiesioginiai mokesčiai); valstybinio ir asmeninio biudžeto tarpusavio ryšiai.
9. Informatikos elementai	Algoritmo sąvokos propedeutika. Nagrinėjant uždavinių sprendimo būdus mokyti nusakyti sprendimo eigą įprastine kalba.	Žodinis ir algebrinis algoritmų aprašymas: nagrinėjant kitų mokomųjų matematikos skyrių uždavinių sprendimo būdus mokyti nusakyti sprendimo eigą įprastine kalba.	Nesudėtingų užduočių atlikimo algoritmų, realizuojamų naudojant skaičiuoklius, išreiškimas įprastine kalba arba skaičiuoklio klavišų simbolių seka.	Duomenys ir informacija; paprasčiausios duomenų bazės, reikiamų duomenų radimas jose; informacijos iš duomenų bazių interpretavimas ir panaudojimas paprasčiausioms užduotims iš kitų mokomųjų skyrių atlikti; algoritmo sąvoka ir pavyzdžiai (aprašymai, vartotojo instrukcijos, formulės); algoritmai plotams skaičiuoti, lygtims spręsti ir t. t.; algoritmų blokinės schemos.	Sudėtingesni algoritmai, blokinės schemos; paprasčiausi artutiniai lygčių sprendimo metodai.	Sudėtingesni algoritmai ir jų blokinės schemos; modeliavimo pavyzdžiai.

3. MATEMATIKOS VADOVĖLIO 8 KLASEI TURINYS

Vadovėlis susideda iš dviejų dalių. Pirmajai vadovėlio daliai siūlome skirti daugiau laiko. Kad lengviau būtų planuoti darbą, pateikiame vadovėlio turinį nurodydami *orientacinį minimalų* kiekvienai temai įsisavinti pamokų skaičių. Šis skaičius nurodytas skliausteliuose šalia kiekvienos dalies, skyriaus (skyrelio) pavadinimo. (Suprantama, nurodytą pamokų skaičių galima keisti savo nuožiūra.)

Pastaba. Į rekomenduojamą minimalų pamokų *skyriui* nagrinėti skaičių įeina viena papildoma pamoka, kuri gali būti skirta skyriui pakartoti, kontroliniam darbui.

I dalis (80)

II dalis (64)

1, **2**, **3**, **7**, **9**, **10**, **11** skyriai yra algebros, **4**, **5**, **8** — geometrijos, **6** — matematinės statistikos.
Pastaba. **12** skyriaus uždavinius rekomenduojama spręsti visais mokslo metais.

Iš algebros svarbiausia mokėti:

- pertvarkyti reiškinius, kuriuose yra laipsniai su sveikuoju rodikliu ir kvadratinės šaknys;
- atskliausti, kai reiškinys yra padaugintas iš reiškinio;
- greitosios daugybos formules;
- išskaidyti reiškinį dauginamaisiais;
- spręsti tiesines nelygybes;
- spręsti tiesinių nelygybių sistemas;
- nustatyti, ar du dydžiai yra tiesiogiai (atvirkščiai) proporcingi;
- apskaičiuoti dydžio apytikslės reikšmės absoliučiąją ir santykinę paklaidas;
- spręsti uždavinius, susijusius su paprastaisiais procentais.

Iš geometrijos svarbiausia mokėti:

- remtis Pitagoro tiesiogine ir atvirkštine teoremomis;
- spręsti uždavinius, susietus su piramidės aukštine;
- apskaičiuoti ritinio tūrį;
- taikyti teoremą apie stačiojo trikampio statinį, esantį prieš 30° kampą;
- nurodyti, kur yra taškai, vienodai nutolę nuo dviejų taškų (atkarpos galų), ir taškai, vienodai nutolę nuo kampo kraštinių;
- nubraižyti figūrą, simetrišką duotajai figūrai duotosios tiesės ir duotojo taško atžvilgiu.

Iš statistikos svarbiausia mokėti:

- imties duomenis vaizduoti grafiškai: taškine diagrama, daugiakampiu, histograma;
- rasti imties vidurkį, medianą;
- grupuoti imties duomenis.

Įvadiniai skyreliai skirti padėti mokiniams įsijungti į mokymosi procesą po vasaros atostogų. Šie skyreliai nėra būtini, todėl juos galima ir praleisti arba prie jų grįžti mokytojui patogiu metu. Pagrindinis tikslas — mokslo metų pradžioje neišgąsdinti mokinių sudėtinga matematika, o sprendžiant realius, linksmus, daug matematikos žinių nereikalaujančius uždavinius sudominti matematika ir po truputį pamiršti vasaros linksmybes.

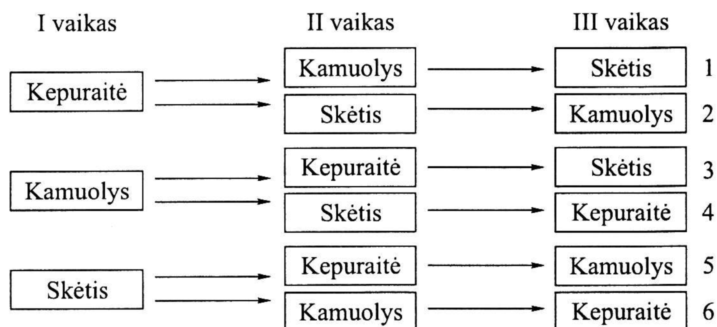
MĄSTYK IR SKAIČIUOK

Pirmajame skyrelyje nėra teorinės dalies. Pateikiami uždaviniai — variantų skaičiavimas — kombinatorikos propedeutika. Žemesnėse klasėse mokiniai nustatinėjo įvairius loginius dėsningumus, braižė galimybių medžius. Šio skyrelio uždaviniais siekiama tobulinti variantų surašymo ir skaičiavimo įgūdžius. Panašių uždavinių bus ir kituose šio vadovėlio skyriuose. Teoriniai kombinatorikos pagrindai bus nagrinėjami 9 klasėje (Matematika 9, II dalis).

Toliau pateikiami uždavinių sprendimo būdai nėra vieninteliai. Sprendžiant šiuos uždavinius patartina sudaryti sąlygą atitinkančią schemą, pagal susikurtą algoritmą surašyti galimus variantus, ieškoti dėsningumų ir pan.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

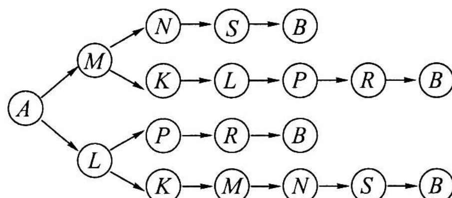
1. Sprendimą galima pavaizduoti schema:



Žinoma, apie III vaiką galima ir nekalbėti, jam — kas liko.

Atsakymas. Prizus draugai gali pasidalyti 6 būdais.

2. Galimi maršrutai pavaizduoti schema:



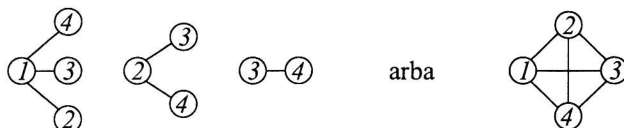
Atsakymas. 4 būdais.

3. a) Patogu drauges sunumeruoti *1*, *2*, *3*. Draugės gali susėsti taip: *123* *213* *312*
132 *231* *321*

b) Pažymėkime drauges skaičiais: Kornelija — *1*, Regina — *2*, trečia draugė — *3*. Draugės gali susėsti taip: *123, 213, 312, 321.*

Atsakymas. a) 6 būdais; b) 4 būdais.

4. a) Pažymėkime draugus skaičiais *1*, *2*, *3*, *4*. Sprendimą galima pavaizduoti taip:



Taigi buvo pasisveikinta 6 kartus.

b) Kai vaikai sveikinosi paspausdami vienas kitam ranką (punktas a), tai gavome 6 pasisveikinimus (rankų paspaudimus) — kiekvienai draugų porai tenka po vieną rankų paspaudimą. Šiuo atveju (b) pasisveikinus dviems draugams žodis „labas“ ištariamas du kartus. Vadinasi, žodis „labas“ buvo ištartas $6 \cdot 2 = 12$ (kartų).

Atsakymas. a) 6; b) 12.

5. a) $18 = 1 + 17 = 2 + 16 = 3 + 15 = 4 + 14 = 5 + 13 = 6 + 12 = 7 + 11 = 8 + 10 = 9 + 9$.

b) $18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = -1 \cdot (-18) = -2 \cdot (-9) = -3 \cdot (-6)$.

Atsakymas. a) 9 būdais; b) 6 būdais.

Skaičius 0 nėra natūralusis.

6. a)

13	31	51	71	91
15	35	53	73	93
17	37	57	75	95
19	39	59	79	97

b)

20	40	60	80
22	42	62	82
24	44	64	84
26	46	66	86
28	48	68	88

Reikia atkreipti mokinių dėmesį, kad skaičiaus pirmas skaitmuo negali būti 0.

7. a) 6 vėliavas; b) 6 vėliavas.

8.

Teisingai išspręstų uždavinių skaičius			Taškų skaičius
Sunkus	Vidutinis	Lengvas	
6	0	0	18
5	1	0	17
5	0	1	16
4	2	0	16
4	1	1	15
3	3	0	15

9.

Saldainių dėžučių skaičius	Sausainių pakelių skaičius	Bendras svoris
3	—	1 kg 800 g
2	3	1 kg 950 g
2	2	1 kg 700 g
2	1	1 kg 450 g
2	0	1 kg 200 g
1	5	1 kg 850 g
1	4	1 kg 600 g
1	3	1 kg 350 g
1	2	1 kg 100 g
1	1	850 g
1	—	600 g
—	8	2 kg
—	7	1 kg 750 g
—	6	1 kg 500 g
—	5	1 kg 250 g
—	4	1 kg
—	3	750 g
—	2	500 g
—	1	250 g

Sąlygoje neaptarta, ką laikyti rinkiniu: ar komplektas, kuriame nėra saldainių ar sausainių, — tai rinkinys ar ne? Taigi mokinių atsakymai gali skirtis.

10. Uždavinys tik iš pirmo žvilgsnio atrodo nesunkiai išsprendžiamas. Kelis skirtingus kelius nesunkiai suras visi mokiniai. Bet ne visi pastebės, kad į tašką C voras gali patekti ir keliu $AFNC$. Pirmiausia patartina atidžiai išnagrinėti uždavinio sąlygą. Atkreipkite dėmesį, kad voras:

1) tuo pačiu keliu gali ropoti tik vieną kartą;

2) būtinai turi praropoti taškus C, K ir E nurodyta eilės tvarka ir tik po vieną kartą;

3) praropoti taškus A, D, F, G, L, M ir N gali ir daugiau negu vieną kartą (jei neropoja tuo pačiu keliu);

4) taške B gali būti tik vieną kartą (pasiekęs musę voras toliau neberopoja).

Uždavinį patartina spręsti etapais — kiekviename etape surašant voro ropojimo skirtingus kelius iš:

1) taško A į tašką C; 2) taško C į tašką K;

3) taško K į tašką E; 4) taško E į tašką B.

Suskaičiuoti visus skirtingus kelius nėra lengva, todėl tai padaryti pasiūlykite tik stipresniems mokiniams. Galite nurodyti mokiniams, kad iš viso yra 18 skirtingų kelių vorui pasiekti musę, ir pasiūlyti juos surašyti namuose.

<table>
<tr><td colspan="19">A</td></tr>
<tr><td>1)</td><td colspan="12">C</td><td colspan="6">FNC</td></tr>
<tr><td>2)</td><td colspan="9">K</td><td colspan="3">NFADK</td><td colspan="3">K</td><td colspan="3">ADK</td></tr>
<tr><td>3)</td><td colspan="5">E</td><td colspan="4">LE</td><td colspan="2">E</td><td>LE</td><td colspan="2">E</td><td>LE</td><td colspan="2">E</td><td>LE</td></tr>
<tr><td>4)</td><td>L</td><td>MG</td><td>MGFAD</td><td>NFG</td><td>NFAD</td><td>MG</td><td>MGFAD</td><td>NFG</td><td>NFAD</td><td>L</td><td>MG</td><td>MG</td><td>L</td><td>MG</td><td>MG</td><td>L</td><td>MG</td><td>MG</td></tr>
<tr><td colspan="19">B</td></tr>
</table>

Atsakymas. Iš viso yra 18 skirtingų kelių vorui pasiekti musę:
ACKELB, ACKEMGB, ACKEMGFADB, ACKENFGB, ACKENFADB, ACKLEMGB, ACKLEMGFADB, ACKLENFGB, ACKLENFADB, ACNFADKELB, ACNFADKEMGB, ACNFADKLEMGB, AFNCKELB, AFNCKEMGB, AFNCKLEMGB, AFNCADKELB, AFNCADKEMGB, AFNCADKLEMGB.

SKAIČIUOK IR TAUPYK

Skyrelyje kartojamas ir apibendrinamas 7 klasėje nagrinėtas skyrius „Procentai. Šeimos ekonomika" (Matematika 7, II dalis). Šis skyrelis turėtų padėti suvokti, *kaip galima planuoti santaupas.* Akivaizdu, jog norint per tam tikrą laikotarpį sutaupyti pinigų reikia, kad gautos per tą laiką pajamos viršytų išlaidas.

Tam tikro laikotarpio visų pajamų ir išlaidų planas vadinamas *biudžetu.* Biudžetus sudarinėja valstybės, įmonės, šeimos, žmonės. Šiame skyrelyje nagrinėsime tik asmens ir šeimos biudžetų pavyzdžius.

Biudžeto sudarymas yra sudėtingas procesas. Paprastai išskiriami trys svarbūs dalykai:

— *finansinių tikslų nustatymas*;

— *būsimų pajamų įvertinimas*;

— *išlaidų planavimas.*

Finansinių tikslų nustatymas. Žmogus ar šeima dažnai nori susitaupyti, pavyzdžiui, namui, butui, automobiliui įsigyti ar mokymuisi universitete finansuoti, nuosavam verslui plėtoti ir pan. Taigi pirmiausia numatome, kam ir kiek taupysime, t. y. iškeliame sau ilgalaikį tikslą.

Būsimų pajamų įvertinimas. Kitas biudžeto rengimo žingsnis — pajamų šaltinių sąrašo sudarymas. Tai gali būti gaunami atlyginimai, pajamos, gautos pardavus ar išnuomojus asmeninį turtą, palūkanos už santaupas, laikomas bankuose ir kt.

Išlaidų planavimas. Paskiausiai sudaromas visų planuojamų pirkinių ir paslaugų, už kurias reikia mokėti, sąrašas ir pridedama ilgalaikiam tikslui įgyvendinti reikalinga sutaupyti pinigų suma ar jos dalis. Šį sąrašą patartina sudaryti pradedant nuo būtiniausių pastovių išlaidų, pavyzdžiui, išlaidų būstui, maistui, aprangai, transportui, mokslui ir t. t. Sudarytas sąrašas vėliau gali būti koreguojamas, pavyzdžiui, mažinamos numatomos išlaidos, išbraukiami mažiau svarbūs pirkiniai, atsisakoma nebūtiniausių paslaugų ir pan. Todėl planuojant išlaidas, t. y. sudarant numatomų išlaidų sąrašą, jį patogu suskirstyti į dvi dalis: pastoviąsias išlaidas ir kintamąsias išlaidas.

Biudžeto svarbiausias akcentas — *planuojamos santaupos.* Pagal jas, o taip pat pagal numatomas pajamas ir neišvengiamas pastoviąsias išlaidas koreguojamos kintamosios išlaidos. Planuojant santaupas kintamosios išlaidos, jeigu reikia, kartais gerokai apkarpomos, arba, kaip sakoma, „susiveržiamas diržas".

Pakartoti:
darbo užmokesčio skaičiavimą;
indėlių palūkanas;
dešimtainių trupmenų veiksmus.

Išmokti:
analizuoti biudžeto pavyzdį;
atpažinti subalansuotą, perteklinį ir deficitinį biudžetą;
sudaryti šeimos ir asmeninį biudžetą.

Šiame skyrelyje:

1. Išsiaiškinama *biudžeto* sąvoka, biudžeto sudarymo tikslai.
2. Nagrinėjami subalansuoto, deficitinio ir perteklinio biudžetų požymiai.
3. Nagrinėjamas šeimos biudžeto pavyzdys.
4. Atliekamos įvairios su biudžetu susijusios užduotys.
5. Primenamos indėlių palūkanos ir jų apskaičiavimai.
6. Pateiktoje užduotyje aiškinamasi, jog Jonaičių šeimos biudžetas yra perteklinis, nes pajamos didesnės už išlaidas (išlaidos kartu su planuojamomis santaupomis yra lygios numatomoms pajamoms).

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

11–13 uždaviniai yra teminiai. 14–16 uždaviniai kartoja palūkanų apskaičiavimą žinant indėlį ir palūkanų normą. 17 uždavinys tęsia pažintį su promilėmis. 18 uždavinys skirtas logikai ir nuovokumui ugdyti.

11–12. Sudarant šeimos ir asmeninį biudžetą gali pagelbėti išlaidų įvardijimas ir detalizavimas. Galima pasiūlyti vaikams tai padaryti patiems. Pavyzdžiui:
Maistas: maisto produktai, maitinimasis valgyklose, kavinėse.
Namų ūkio išlaidos: komunalinės paslaugos, nuoma, paskolos grąžinimas.
Transportas: benzinas ir tepalai, automobilio techninis aptarnavimas, visuomeninis transportas.
Drabužiai: pirkiniai darbui ir laisvalaikiui, valymas, skalbimas.
Avalynė: pirkiniai darbui ir laisvalaikiui, taisymas.
Medicinos paslaugos: draudimas, vaistai, dantų priežiūra.
Vaikų priežiūra: kišenpinigiai, pramogos, mokymosi reikmenys, klubai, būreliai ir pan., atostogos, poilsis, kitos išlaidos.
Draudimas: gyvybės, automobilio, turto draudimas, kitos rūšys.
Kitos įvairios išlaidos: dovanos, aukos, labdara, kosmetika, nario mokesčiai, laikraščiai, žurnalai, teatras, kinas, koncertai.

13. a) Numatomų pajamų suma yra 2085 Lt.
b) Numatomų išlaidų ir planuojamų santaupų suma yra 2135 Lt.
Šis šeimos biudžetas yra perteklinis.

Aptarkite su mokiniais, kad norint sutaupyti 170 Lt reikia 50 Lt sumažinti kintamąsias išlaidas. To nepadarius sutaupysime tik 120 Lt.

14. Banko palūkanos per metus yra $12\,840 - 12\,000 = 840$ (Lt).
Banko metinių palūkanų norma yra $\frac{840 \cdot 100}{12\,000} = 7$ (%).

15. Į banką reikia padėti $\frac{1000 \cdot 100}{6} = 16\,666\frac{2}{3}$ (Lt) $\approx 16\,666{,}67$ (Lt).

1000 Lt — 6%
x Lt — 100%

16. a) Už terminuotąjį indėlį palūkanos bus $\frac{8500 \cdot 7}{100} = 8500 \cdot 0{,}07 = 595$ (Lt).
b) Už indėlį iki pareikalavimo palūkanos bus $\frac{2000 \cdot 4}{100} = 2000 \cdot 0{,}04 = 80$ (Lt).

17. Gyventojų skaičius padidėjo $\frac{60\,000 \cdot 9}{1000} = 60\,000 \cdot 0{,}009 = 540$ (žmonių).

60 000 gyventojų — 100‰
x gyventojų — 9‰

18. Iš sąlygos aišku, kad ledų porcija brangesnė už 120 ct. Kadangi sudėjus Daumanto ir Rimgaudo pinigus jų neužtenka vienai porcijai, tai ledų porcija pigesnė už 122 ct. Vadinasi, ledų porcijos kaina yra 121 ct, t. y. 1 Lt 21 ct, o Daumantas turėjo 1 ct, Rimgaudas — 118 ct.
Tą patį sprendimą galima užrašyti ir formaliau.
Ledų porcijos kainą pažymėkime x. Tada Daumantas turėjo $(x - 120)$ ct, o Rimgaudas $(x - 2)$ ct. Sudarome nelygybę:

$(x - 120) + (x - 2) < x,$

$x < 122.$

Galima tarti, kad Daumantas pinigų neturėjo. Tada porcija ledų galėjo kainuoti ir 120 ct.

NE VISA AUKSAS, KAS AUKSU ŽIBA ...

Šiame skyrelyje supažindinama su dažnai girdėta sąvoka — *praba*. Skyrelis ir jo medžiaga — savotiška skyrelio „Promilė“ (Matematika 7, II dalis) tąsa. Kaip tirpios medžiagos dalis skiedinyje (tirpale) vadinama koncentracija, taip tauriojo metalo dalis lydinyje vadinama praba.

Koncentracija dažniausiai matuojama šimtosiomis dalimis (= procentais) arba tūkstantosiomis dalimis (= promilėmis). *Praba* dažniausiai matuojama promilėmis (tūkstantosiomis dalimis), bet kartais *aukso* praba matuojama karatais (dvidešimtketvirtosiomis dalimis). Kadangi tauriojo metalo dalis lydinyje (praba) dažniausiai matuojama promilėmis (tūkstantosiomis dalimis), tai sakoma tiesiog, pavyzdžiui, praba 585 (o ne praba lygi 585 ‰).

Pastaba. Sąvokos *praba* ir *karatas* nėra būtinos pagrindinės mokyklos kurse. Žodis *karatas* (ct) dabar dažniausiai vartojamas kita prasme — perlų ir brangakmenių masei išreikšti: 1 ct = 0,2 g.

Pakartoti:

promilės sąvoką;
pagrindinę proporcijos taisyklę.

Išmokti:

paaiškinti prabos sąvoką;
spręsti paprasčiausius su lydinių praba susijusius uždavinius;
aukso prabą, išreikštą promilėmis, išreikšti karatais ir atvirkščiai.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiama *prabos* sąvoka — tauriojo metalo dalis lydinyje. Ji dažniausiai išreiškiama tūkstantosiomis dalimis (promilėmis).
2. Svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog:

   [Lydinys] = [taurusis metalas] + [ligatūra (priemaišos)]

   Analogiškai — tirpalą sudaro vanduo ir tirpioji medžiaga.
3. Aiškinama *karato* sąvoka — *aukso* dalis lydinyje, išreikšta *dvidešimtketvirtosiomis* dalimis. Pavyzdžiui, pasakymas 20 karatų auksas (arba aukso praba yra 20 karatų) reiškia, kad lydinyje aukso yra $\frac{20}{24}$, t. y. $\frac{5}{6}$ lydinio.
4. Mokoma aukso prabą, išreikštą promilėmis, išreikšti karatais ir atvirkščiai — karatus išreikšti promilėmis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

19. a) Žiede gryno aukso yra $\frac{8\cdot585}{1000} = 4{,}68$ (g).
b) Apyrankėje gryno sidabro yra $\frac{25\cdot875}{1000} = 21{,}875$ (g).

8 g — 1000‰
x g — 585‰

20. a) Auskaro aukso praba yra $\frac{3{,}664\cdot1000}{4} = 916$.
b) Grandinėlės sidabro praba yra $\frac{10{,}5\cdot1000}{12} = 875$.

21. Gryno aukso ir lydinio masių santykis yra 9 : 10.
a) Lydinio praba yra $\frac{9}{10}\cdot1000 = 900$.
b) Lydinyje gryno aukso yra $\frac{5\cdot900}{1000} = 4{,}5$ (g).

22. Gryno sidabro ir lydinio masių santykis yra 4 : 5.
a) Taurės sidabro praba yra $\frac{4}{5}\cdot1000 = 800$.
b) Taurėje gryno sidabro yra $\frac{1{,}5\cdot800}{1000} = 1{,}2$ (kg).

23. a) Aukso lydinio praba yra:
$\frac{1000\cdot18}{24} = 750$; $\frac{1000\cdot14}{24} = 583\frac{1}{3}$; $\frac{1000\cdot20}{24} = 833\frac{1}{3}$; $\frac{1000\cdot12}{24} = 500$.

18 ct — x praba
24 ct — 1000 praba

b) Aukso lydinys turi:
$\frac{24\cdot980}{1000} = 24\cdot0{,}98 = 23{,}52$ (ct); $24\cdot0{,}855 = 20{,}52$ (ct); $24\cdot0{,}75 = 18$ (ct);
$24\cdot0{,}9 = 21{,}6$ (ct).

24. Segėje gryno aukso yra:
a) $\frac{18\cdot20}{24} = 15$ (g); b) $\frac{18\cdot18}{24} = 13{,}5$ (g); c) $\frac{18\cdot14}{24} = 10{,}5$ (g);
d) $\frac{18\cdot23}{24} = 17{,}25$ (g).

18 g — 24 dalys
x g — 20 dalių

1. LAIPSNIS

Mokiniai jau žino laipsnio su natūraliuoju rodikliu sąvoką, moka kelti racionalųjį skaičių natūraliuoju laipsnio rodikliu, vienodų raidinių reiškinių sandaugą užrašyti laipsniu.

Šiame skyriuje pakartojus laipsnio su natūraliuoju rodikliu sąvoką nagrinėjama laipsnių su vienodais pagrindais daugyba ir dalyba, sandaugos, trupmenos ir laipsnio kėlimas natūraliuoju laipsniu, apibrėžiamas nelygaus nuliui skaičiaus nulinis laipsnis ir laipsnis su sveikuoju neigiamuoju rodikliu, mokoma laipsnių su sveikaisiais rodikliais veiksmų, taip pat labai mažus skaičius užrašyti standartine išraiška.

Svarbiausias šio skyriaus uždavinys — išmokyti atlikti veiksmus su laipsniais, kai laipsnio rodiklis yra sveikasis skaičius.

Sprendžiant uždavinius daugiau dėmesio reikėtų skirti mokinių kalbai ir rezultato prognozavimui.

1.1. Laipsnis su natūraliuoju rodikliu

Skyrelis skirtas laipsnio su natūraliuoju rodikliu sąvokai prisiminti (su ja mokiniai susipažino 5–7 klasėse), skaitinių reiškinių, į kuriuos įeina laipsniai, reikšmių skaičiavimo įgūdžiams įtvirtinti. Mokoma kelti laipsniu naudojantis skaičiuokliu.

Šio skyrelio pagrindinis tikslas — išmokyti apskaičiuoti skaitinių reiškinių su laipsniais reikšmes. Naudojant skaičiuoklius galimos įvairios klaidos, todėl būtina mokinius pratinti mintinai apytiksliai įvertinti reiškinio reikšmę.

Pakartoti:

laipsnio su natūraliuoju rodikliu apibrėžimą;
sandaugos ženklo nustatymą;
veiksmų atlikimo tvarką.

Išmokti apskaičiuoti laipsnių ir skaitinių reiškinių su laipsniais reikšmes.

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiais primenama, kaip keliama natūraliuoju laipsniu ir pakartojamas laipsnio su natūraliuoju rodikliu apibrėžimas:

Sandauga n dauginamųjų, kurių kiekvienas lygus a, žymima a^n ir vadinama skaičiaus a n-tuoju laipsniu. Skaičiaus a pirmuoju laipsniu vadinamas pats skaičius a.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}} = a^n, \quad a^1 = a,$$

a^n— laipsnis su natūraliuoju rodikliu;
a — laipsnio pagrindas;
n — laipsnio rodiklis.

2. Pavyzdžiais pailiustruojama, kaip skaičiuoti skaitinių reiškinių su laipsniais reikšmes. Mokiniams galima priminti veiksmų atlikimo taisykles. Skaičiuojant skaitinių reiškinių reikšmes:
   - sudėties ir atimties (daugybos ir dalybos; kėlimo laipsniu ir šaknies traukimo) veiksmai atliekami iš kairės į dešinę ta tvarka, kuria yra parašyti;
   - jei skaitiniame reiškinyje nėra veiksmų skliaustuose, tai visi veiksmai atliekami tokia tvarka: 1) kėlimas laipsniu, daugyba, dalyba; 2) sudėtis, atimtis;
   - jei reiškinyje yra skliaustų, tai pirmiausia atliekami veiksmai skliaustuose ta pačia tvarka, kuri aptarta, o tada kaip ir reiškinyje be skliaustų.

   Pastaba. Populiariai ir vaizdžiai apie tai parašyta knygoje „Tikslieji mokslai humanitarams“, I dalis, 20–23 p.

3. Pavyzdžiais parodoma, kaip skaičiuokliu apskaičiuoti laipsnių ir reiškinių su laipsniais reikšmes.

   Pastaba. Skaičiavimo skaičiuokliu algoritmas priklauso nuo skaičiuoklio tipo, todėl vadovėlyje pateiktos pavyzdžių schemos nebūtinai tiks mokinių turimiems skaičiuokliams.

4. Smulkiu šriftu pateikiamos istorinės žinios. Supažindinama su senoviniu skaičiavimo prietaisu — *abaku.*

   Pastaba. Nors ši medžiaga nėra privaloma, bet verta ją su mokiniais pasiaiškinti, nes, skirtingai nuo skaičiuoklių ar kompiuterių, abako veikimo principą nesunku išsiaiškinti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Laipsniui su natūraliuoju rodikliu pakartoti ir žinioms gilinti skirti 25–36 uždaviniai. Svarbu pakartoti veiksmų atlikimo tvarką (28, 29, 31, 32). Laipsnio reikšmei rasti skaičiuokliu skirti 30 ir 31 pratimai. Juos atliekant kartu pakartojamas ir skaičių apvalinimas.

37–45 uždaviniais kartojamas žemesnių klasių kursas: kubo tūrio ir kraštinės radimas (37), stačiojo trikampio kraštinių pavadinimai (38), skaitinio reiškinio reikšmės skaičiavimas (39), kampų savybės (40), tekstinių uždavinių sprendimas sudarant lygtis (41), procentų skaičiavimas (42), lygčių sprendimas (43), judėjimas upe (44). 45 — netradicinės formuluotės uždavinys, reikalaujantis nuovokumo bei pastabumo.

1, 2a–g, 4, 5a–e — visiems;
2h–l, 3, 5f, 6–9 — gabesniems.

25. a) 0,09; b) $\frac{16}{81}$; c) $-\frac{1}{216}$; d) $\frac{1}{4}$; e) 6,25; f) $12\frac{19}{27}$.

26. a) 16; b) 1; c) −1; d) 1; e) −1; f) 0.

Rekomenduojama spręsti mintinai.

Pastaba. Išsprendus 25 ir 26 pratimus galima su mokiniais pastebėti, kad:

1) teigiamojo skaičiaus bet koks laipsnis yra teigiamasis skaičius;

2) neigiamojo skaičiaus laipsnis yra: teigiamasis skaičius, jei laipsnio rodiklis yra lyginis skaičius; neigiamasis skaičius, jei laipsnio rodiklis — nelyginis skaičius;

3) vienetą keldami bet kokiu laipsniu gauname 1, t. y. $1^n = 1$;

4) nulį keldami bet kokiu laipsniu, nelygiu nuliui, gauname 0, t. y. $0^n = 0$, $(n \neq 0)$.

27. a) 4; b) −4; c) 4; d) 0,001; e) −0,001; f) −0,001; g) $\frac{4}{9}$; h) $\frac{4}{9}$; i) $-\frac{4}{9}$; j) $\frac{8}{3}$.

Galima spręsti mintinai.

28. a) 12; b) 1; c) 109; d) $-4\frac{7}{9}$; e) −18; f) 0,169; g) 36; h) 0,0004.

29. a) 424; b) 256; c) 1458; d) 1080; e) −1; f) −147; g) −900; h) 25.

30. *Nurodymas.* Prieš skaičiuojant skaičiuokliu patartina mintinai apytiksliai įvertinti rezultatą. Mokiniai turėtų pastebėti, kad a) punkto rezultatas turi būti didesnis už 3^3, t. y. už 27; b) — mažesnis už 1; c) — mažesnis už 2^5, t. y. už 32; d) — didesnis už 2^6, t. y. už 64; e) — didesnis už 1.

Skaičiuojant laipsnius skaičiuokliu (beje, kaip ir atliekant bet kokius kitus skaičiavimo veiksmus) reikia atsižvelgti į turimo skaičiuoklio galimybes. Tai reiškia, kad skaičiuojant visai nebūtina naudotis vadovėlyje pateiktu algoritmu. Pavyzdžiui, norint rasti 4^6 galima skaičiuoti ir pagal tokią schemą:

[4] [x^y] [6] [=] 4096.

Atsakymas. a) 30,37; b) 0,28; c) 21,67; d) 72,07; e) 1,46.

31. *Nurodymas.* Kaip ir praeitame uždavinyje galima apytiksliai įvertinti rezultatą, pvz.:

a) $2{,}08^3 : 1{,}56 \approx 2^3 : 1{,}6 = 8 : 1{,}6 = 5$;

d) $(1{,}27 + 6{,}32)^3 = 7{,}59^3$; $7^3 < 7{,}59^3 < 8^3$, t. y. rezultatas bus didesnis už 343 ir mažesnis už 512.

Atsakymas. a) 5,8; b) 54,4; c) 0,8; d) 437,2; e) 4,1; f) 37,1.

32. a) −48; −6; 0; 0,048; b) −125; 99; 99; −125; −525.

33. *I būdas.* Apskaičiuojame laipsnių ar reiškinių reikšmes ir jas palyginame, t. y.:

a) $0{,}9^2 = 0{,}81$; $(-0{,}9)^2 = 0{,}81$. Kadangi $0{,}81 = 0{,}81$, tai $0{,}9^2 = (-0{,}9)^2$;

b) $(-0{,}2)^3 = -0{,}008$; $(-0{,}3)^3 = -0{,}027$. Kadangi $-0{,}008 > -0{,}027$, tai $(-0{,}2)^3 > (-0{,}3)^3$;

c) $7 \cdot 5^2 = 7 \cdot 25 = 175$; $(7 \cdot 5)^2 = 35^2 = 1225$. Kadangi $175 < 1225$, tai $7 \cdot 5^2 < (7 \cdot 5)^2$;

d) $-5 \cdot 4^3 = -5 \cdot 64 = -320$; $-5 \cdot (-4)^3 = -5 \cdot (-64) = 320$. Kadangi $-320 < 320$, tai $-5 \cdot 4^3 < -5 \cdot (-4)^3$.

II būdas. Gabesni mokiniai galėtų spręsti šį uždavinį ir neskaičiuodami, t. y.:

a) pastebėkime, kad duotųjų laipsnių pagrindai yra vienas kitam priešingieji skaičiai, o laipsnių rodikliai — lygūs lyginiai skaičiai, todėl abiejų laipsnių reikšmės bus lygios;

b) iš dviejų laipsnių su vienodais natūraliaisiais laipsnio rodikliais didesnis tas, kurio pagrindas didesnis;

c) čia būtų pravartu žinoti taisyklę $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $(n \in N)$. Tuomet $(7 \cdot 5)^2 = 7^2 \cdot 5^2$. Kadangi $7 < 7^2$; $5^2 = 5^2$, tai $7 \cdot 5^2 < 7^2 \cdot 5^2$, t. y. $7 \cdot 5^2 < (7 \cdot 5)^2$. Tačiau kol šios taisyklės nemokame, galime samprotauti ir taip: $7 \cdot 5^2 = 7 \cdot 5 \cdot 5$; $(7 \cdot 5)^2 = 7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5$. Matome, kad $(7 \cdot 5)^2 = 7 \cdot 5^2 \cdot 7$, todėl $7 \cdot 5^2 < (7 \cdot 5)^2$;

d) pastebėkime, kad kairėje kvadratėlio pusėje esančio reiškinio reikšmė yra neigiamasis, o dešinėje — teigiamasis skaičius, todėl $-5 \cdot 4^3 < -5 \cdot (-4)^3$.

Atsakymas. a) =; b) >; c) <; d) <.

34. a) Po 1 valandos mėgintuvėlyje bus $500 \cdot 2 = 1000$ (bakterijų);
po 2 valandų — $1000 \cdot 2 = (500 \cdot 2) \cdot 2 = 500 \cdot 2^2 = 2000$ (bakterijų);
po 3 valandų — $2000 \cdot 2 = 500 \cdot 2^2 \cdot 2 = 500 \cdot 2^3 = 4000$ (bakterijų);
po n valandų — $500 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n} = 500 \cdot 2^n$ (bakterijų).

b) $1000 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 1000 \cdot 1{,}5^3 = 3375$.

35. a) ± 3 (randame skaičių, kurį pakėlę kvadratu gauname 9);
b) ± 1;
c) ± 100 (b ir c punktai analogiški punktui a);
d) 2 (randame skaičių, kurį pakėlę kubu gauname 8);
e) -2;
f) -100 (e ir f punktai analogiški punktui d);
g–k punktai — tai neįvardytos rodiklinės lygtys. Tačiau mokiniai turėtų nesunkiai jas išspręsti žodžiu. Kad būtų paprasčiau, galima suformuluoti klausimą:
g) kokiu laipsnio rodikliu reikia pakelti 2, kad gautume 32?
Gabesniems mokiniams galima pailiustruoti ir lygties sprendimą:
$2^x = 32$, $2^x = 2^5$. Kadangi laipsnių pagrindas tas pats, tai, kad būtų lygūs laipsniai, turi būti lygūs ir jų rodikliai, t. y. $x = 5$.
Analogiškai sprendžiami ir h–k punktai:
h) 3; i) 50; j) 1; k) 1.

Rekomenduojama spręsti mintinai.

36. a) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$; b) $\left(1\frac{2}{5}\right)^2$; c) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2$; d) $\left(1\frac{6}{7}\right)^2$.

37. a) Kubo tūris skaičiuojamas pagal formulę $V = a^3$ (čia a — kubo kraštinė). Pagal sąlygą: $V = 64$, tai $a^3 = 64$ ir $a = 4$ cm.
b) Pailginus kraštinę 1 cm kubelio tūris bus $V = (4+1)^3 = 125\,(\text{cm}^3)$. Taigi kubelio tūris padidės $125 - 64 = 61\,(\text{cm}^3)$.
c) Duoto kubelio kraštinė yra 4 cm, naujojo — 4 m, t. y. 400 cm. Vadinasi, kubelio kraštinę reikia pailginti $400 - 4 = 396$ (cm).

38. *Nurodymas.* Lengvas žodžiu sprendžiamas uždavinys. Čia galima daugiau pakalbėti apie stačiuosius trikampius, pavyzdžiui, paklausti:
1) kokios rūšies (pagal kampus) yra pavaizduoti trikampiai;
2) ką galite pasakyti apie kitus stačiojo trikampio kampus (abu smailūs, jų suma lygi 90°).

39. a) $-9{,}225$; b) $-4{,}5$; c) $-\frac{17}{35}$; d) $-9{,}8$.

Punktus a) ir c) galima pasiūlyti apskaičiuoti ir *naudojant skaičiuoklį* bei paprašyti pakomentuoti gautą rezultatą.

40. a) 50°; b) 144°; c) 30°; d) 270°; e) 120°.

Galima spręsti ir mintinai.

41. Patogu susidaryti lentelę:

	Buvo stiklainių	Perdėjus stiklainius
Pirmoji dėžė	$3x$	$3x - 17$
Antroji dėžė	x	$x + 17$

Sudarome lygtį: $3x - 17 = x + 17$, $x = 17$; $3 \cdot 17 = 51$.
Atsakymas. 51 ir 17 stiklainių.

42. Dabartinė prekės kaina 150 Lt atitinka buvusios kainos $100\% - 25\% = 75\%$. Vadinasi, buvusi kaina yra $\frac{150 \cdot 100}{75} = 200$ (Lt).
Atsakymas. 200 Lt.

Reikėtų mokinius pratinti *tikrinti* tokių „paprastų“ uždavinių atsakymus, t. y. suskaičiuoti, ar tikrai sumažinę kainą (200 Lt) 25% gausime 150 Lt.

43. a) -1; b) 4; c) 0; d) -5; e) 5; f) 60.

Galima spręsti ir mintinai.

44. Valties greitis pasroviui yra $90 : 6 = 15$ (km/h), o prieš srovę — $90 : 10 = 9$ (km/h). Upės tėkmės greitis bus $(15 - 9) : 2 = 3$ (km/h).
Atsakymas. **B.**

Išsprendus uždavinį tradiciniu būdu verta iškelti klausimą „Ar galime nurodyti teisingą atsakymą nespręsdami uždavinio, o tikrindami atsakymus?“.

45. Pavyzdžiui:
$6 + 4 = 10$, $5 + 3 < 16$, $4 \times 2 = 8$;
$10 + 6 = 16$, $4 \times 2 = 8$, $5 < 4 + 3$;
$5 \times 2 = 10$, $4 + 4 = 8$, $6 + 3 < 16$.

Siūlome šį uždavinį skirti namų darbams.

1.2. Laipsnių su vienodais pagrindais daugyba ir dalyba

Šiuo skyreliu pradedami nagrinėti veiksmai su laipsniais.

Skyrelių 2 ir 3 struktūra yra panaši:

- nagrinėjamas skaitinis pavyzdys ir žodžiais nusakoma pastebėta taisyklė;
- teigiama, kad pastebėta taisyklė tinka visiems analogiškiems atvejams;
- taisyklė užrašoma bendruoju atveju — raidiniu reiškiniu, t. y. formule;
- užrašyta formulė nusakoma žodžiais;
- pateikiami skaitiniai ir raidiniai formulės taikymo pavyzdžiai;
- pateikiami pavyzdžiai formulei taikyti iš kito galo — atbulai.

Pagrindinis 2 ir 3 skyrelių uždavinys — išmokyti taikyti laipsnių savybes. Su silpnesniais mokiniais reikėtų spręsti tik skaitinius pavyzdžius, vengiant sudėtingų raidinių reiškinių.

Spręsdami uždavinius mokiniai gali naudotis laipsnių lentelėmis, esančiomis knygos gale (žr. 175 p.).

Pakartoti vienodų raidinių reiškinių sandaugos užrašymą laipsniu (laipsnio apibrėžimą).

Išmokti:

dauginti laipsnius su vienodais pagrindais;
išreikšti laipsnį laipsnių sandauga;
dalyti laipsnius su vienodais pagrindais;
išreikšti laipsnį laipsnių dalmeniu;
kelti skaičių nuliniu laipsniu.

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiu aiškinama, kaip rasti dviejų laipsnių su vienodais pagrindais sandaugą.
2. Teigiama, kad ši taisyklė galioja dauginant bet kuriuos laipsnius su vienodais pagrindais, t. y.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in N).$$

3. Įsitikinama, kad šis teiginys teisingas:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ dauginamųjų}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ dauginamųjų}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ dauginamųjų}} = a^{m+n}.$$

Pastaba. Taisyklę taip pat galima taikyti trijų ir daugiau laipsnių su vienodais pagrindais sandaugai. Gabesnieji mokiniai turėtų tuo nesunkiai įsitikinti atsakydami į klaustuku pažymėtą teiginį. Iš tikrųjų,

$$a^m \cdot a^n \cdot a^k = (a^m \cdot a^n) \cdot a^k = a^{m+n} \cdot a^k = a^{m+n+k} \quad (m, n, k \in N).$$

4. Laipsnių su vienodais pagrindais daugybos taisyklė nusakoma žodžiais:

> *Dauginant laipsnius su vienodais pagrindais pagrindas paliekamas tas pats, o laipsnių rodikliai sudedami.*

5. Pavyzdžiais parodoma, kad laipsnių su vienodais pagrindais daugybos taisyklė taikoma ir atbulai, t. y.

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad (m, n \in N).$$

6. Pavyzdžiu aiškinama, kaip rasti dviejų laipsnių su vienodais pagrindais dalmenį.
7. Teigiama, kad ši taisyklė galioja dalijant bet kuriuos laipsnius su vienodais pagrindais, kai dalinio rodiklis didesnis už daliklio rodiklį, t. y.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0;\ m, n \in N;\ m > n).$$

8. Įsitikinama, kad šis tvirtinimas iš tiesų teisingas:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \text{ dauginamųjų}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ dauginamųjų}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m-n) \text{ dauginamųjų}} = a^{m-n}.$$

9. Laipsnių su vienodais pagrindais dalybos taisyklė nusakoma žodžiais:

> *Dalijant laipsnius su vienodais (nelygiais nuliui) pagrindais pagrindas paliekamas tas pats, o iš dalinio rodiklio atimamas daliklio rodiklis.*

10. Pavyzdžiais iliustruojama, kad laipsnių su vienodais pagrindais dalybos taisyklė taikoma ir atbulai, t. y.

$$a^{m-n} = a^m : a^n \quad (a \neq 0;\ m, n \in N;\ m > n).$$

11. Parodoma, kad patogu susitarti (apibrėžti), kad kiekvieno skaičiaus, nelygaus nuliui, nulinis laipsnis lygus vienetui, t. y.

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

12. Pabrėžiama, kad skaičiaus 0 nulinis laipsnis neturi prasmės, t. y. reiškinys 0^0 neturi prasmės.

Pastaba. Iki šiol mokiniai turėjo žinoti, kad dalyba iš nulio neturi prasmės ir kad kvadratinės šaknies pošaknis negali būti neigiamas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 46–54a uždaviniai. 46, 47 ir 54a pratimuose taikoma laipsnių su vienodais pagrindais daugybos taisyklė, o 48 — ši taisyklė taikoma atbulai, 49 ir 50 — laipsnių su vienodais pagrindais dalybos taisyklė, 51–53 — taikomos šios abi taisyklės, 53 — reiškinių reikšmės randamos skaičiuokliu prieš tai suprastinus duotą reiškinį.
Pratimai 54b,c–65 skirti kartojimui: skaitinių reiškinių reikšmių skaičiavimas, kai reiškinyje yra kėlimas laipsniu (54b,c) ir kvadratinės šaknies traukimas (55), reiškinių prastinimas (56), lygčių sprendimas (57), trikampių lygumo požymių (58), kūno masės priklausomybės nuo tūrio (59), dalumo iš 5 ir 9 požymių (60) taikymas, procentų skaičiavimas (62), skaičių palyginimas (63), duomenų vaizdavimas diagrama (65). 64 uždavinys skirtas pastabumui ugdyti.

10, 12, 13, 18 — visiems;

11, 14–17 — gabesniems.

46. a) 2^{11}; b) 7^5; c) $(-5)^{11}$; d) 10^9; e) a^9; f) b^{14}; g) $(-c)^{12}$; h) d^{17}.
Pastaba. g) punkto atsakymą galima parašyti taip: c^{12}; sprendžiant c) punktą negalima rašyti -5^{11}, nes reiškinys -5^{11} nėra laipsnis, bet yra laipsnio 5^{11} ir -1 sandauga.

47. a) 2^7; b) 2^9; c) 2^{15}; d) 2^{10}; e) 3^8; f) 3^6;
g) 3^5; h) 3^{10}; i) 5^6; j) 4^{10}; k) 2^6; l) 6^7.

48. a) $2^5 = 2 \cdot 2^4 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^0 \cdot 2^5$; b) $3^7 = 3 \cdot 3^6 = 3^2 \cdot 3^5 = 3^3 \cdot 3^4$;
c) $a^{18} = a \cdot a^{17} = a^2 \cdot a^{16} = a^3 \cdot a^{15}$; d) $x^{20} = x^2 \cdot x^{18} = x^4 \cdot x^{16} = x^8 \cdot x^{12}$.

b), c), d) punktų galimi ir kitokie atsakymai.

49. a) 2^1; b) 3^3; c) $0{,}5^4$; d) $(-1{,}2)^3$; e) x^7; f) p^{17}; g) z^4; h) $(-y)^4$.
Pastaba. a) punkto atsakymą galima parašyti ir be laipsnio rodiklio, t. y. 2; išsprendus h) punktą galima rašyti y^4.

50. a) 125; b) 0,064; c) 14,1; d) $\frac{4}{9}$; e) $-\frac{1}{27}$;
f) $3\frac{3}{8}$; g) 36; h) 0,01; i) $-0{,}008$.

51. a) 7; b) 121; c) 100 000 000; d) $\frac{1}{81}$; e) 1; f) $\frac{4}{25}$.

52. a) $2^{11} = 2^{10} \cdot 2 = 1024 \cdot 2 = 2048$; b) $2^9 = 2^{10} : 2 = 1024 : 2 = 512$.

53. a) $3{,}5^5 \approx 525{,}2$; b) $7{,}2^3 \approx 373{,}2$; c) $2{,}56^3 \approx 16{,}8$.

54. a) 275; b) 350; c) 13,5.

55. a) 18; b) 40; c) $-0{,}1$; d) 1,2.

56. a) $4{,}8x$; b) $-0{,}45x$; c) $\frac{5}{6}x$; d) $-0{,}9z$; e) $-\frac{1}{15}y$; f) $-0{,}02xy$.

57. a) 28; b) 36.

58. **A, B, C, E, G.**

59. a) $m = \rho \cdot V = 0{,}18 \cdot 8 = 1{,}44$ (g).
b) Vieno padėkliuko tūris yra $40 \cdot 25 \cdot 0{,}5 = 500$ (cm^3), o masė — $0{,}18 \cdot 500 = 90$ (g). Komplekto masė yra $4 \cdot 90 = 360$ (g).

60. *Nurodymas.* Reikia prisiminti skaičių dalumo iš 5 ir 9 požymius:
iš 5 dalijasi tik tie skaičiai, kurių paskutinis skaitmuo yra arba 0, arba 5;
iš 9 dalijasi tik tie skaičiai, kurių skaitmenų suma dalijasi iš 9.
a) 7110; 7115; b) 7110; 7119; c) 7110.

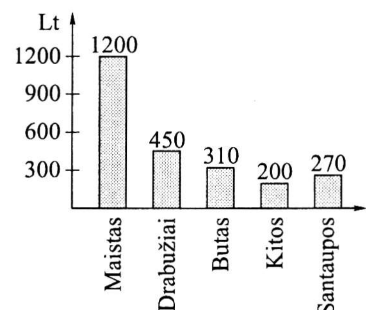
61. Iš 28 kg bulvių galima gauti $\frac{28 \cdot 1{,}4}{8} = 4{,}9$ (kg) krakmolo.

62. **D.**

63. Vienas darbininkas per 1 valandą pagamina $\frac{3}{4}$, o kitas — $\frac{4}{5}$ gaminio.
Kadangi $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, tai galima teigti, kad sparčiau dirba antrasis darbininkas.

64. a) 21; 25. *Taisyklė.* Kas kartą pridedama 4.
b) 3125; 15 625. *Taisyklė.* Kas kartą dauginama iš 5.
c) 19; 22. *Taisyklė.* Pakaitomis pridedama 4 ir 3.
d) 41; 55. *Taisyklė.* Kas kartą pridedamas dvejetu didesnis lyginis skaičius.

65. Šeimos mėnesio santaupos yra $2430 - 2160 = 270$ (Lt).



1.3. Sandaugos, trupmenos ir laipsnio kėlimas natūraliuoju laipsniu

Šiame skyrelyje toliau nagrinėjami veiksmai su laipsniais. Šio skyrelio struktūra analogiška praeito skyrelio struktūrai.

Pakartoti:

laipsnio apibrėžimą;

laipsnių su vienodais pagrindais daugybos ir dalybos taisykles;

daugybos perstatymo ir jungimo dėsnius, t. y. $ab = ba$, $(ab)c = a(bc)$;

n lygių dėmenų sumos reiškimą sandauga, t. y. $\underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ dėmenų}} = mn$.

Išmokti:

kelti sandaugą natūraliuoju laipsniu;

dauginti laipsnius su vienodais rodikliais;

kelti trupmeną natūraliuoju laipsniu;

dalyti laipsnius su vienodais rodikliais;

kelti laipsnį laipsniu.

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiu aiškinamas dviejų narių sandaugos kėlimas natūraliuoju laipsniu.
2. Įrodoma formulė:
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (n \in N).$$
3. Siūloma analogiškai įsitikinti, kad
$$(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \quad (n \in N).$$
Iš tikrųjų,
$$(a \cdot b \cdot c)^n = \big(a \cdot (b \cdot c)\big)^n = a^n \cdot (b \cdot c)^n = = a^n \cdot b^n \cdot c^n \quad (n \in N).$$
Pastaba. Formulė $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, kai a ir b yra skaitiniai dauginamieji, retai kada palengvina skaičiavimus. Suprantama, nereikia iš mokinių reikalauti, kad, pavyzdžiui, reiškinio $(2 \cdot 3)^4$ reikšmę jie skaičiuotų atskirai keldami kiekvieną dauginamąjį 4-ju laipsniu. Formulė dažniau taikoma, kai dauginamieji yra raidiniai reiškiniai.
4. Žodžiais nusakoma sandaugos kėlimo natūraliuoju laipsniu taisyklė:

> *Keliant sandaugą natūraliuoju laipsniu kiekvienas dauginamasis keliamas tuo laipsniu, o gauti rezultatai sudauginami.*

5. Pavyzdžiais parodoma, kad sandaugos kėlimo natūraliuoju laipsniu taisyklė taikoma ir atbulai, t. y.
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad (n \in N).$$
6. Pavyzdžiu aiškinamas trupmenos kėlimas natūraliuoju laipsniu.
7. Įrodoma formulė:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0,\ n \in N).$$
8. Žodžiais nusakoma trupmenos kėlimo natūraliuoju laipsniu taisyklė:

> *Keliant trupmeną natūraliuoju laipsniu tiek skaitiklis, tiek vardiklis keliami tuo laipsniu.*

9. Pavyzdžiais parodoma, kad trupmenos kėlimo natūraliuoju laipsniu taisyklė taikoma ir atbulai, t. y.
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0,\ n \in N).$$
10. Pavyzdžiu aiškinama, kaip laipsnį kelti laipsniu.
11. Įrodoma ir žodžiais nusakoma formulė:
$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \in N).$$

> *Keliant laipsnį natūraliuoju laipsniu laipsnio pagrindas lieka tas pats, o rodikliai sudauginami.*

Pastaba. Atkreipkite dėmesį į skliaustus formulėse, nes, pavyzdžiui, $(a^m)^n \neq a^{m^n}$.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Temai įtvirtinti yra 66–75 pratimai: 66 — taikoma sandaugos kėlimo natūraliuoju laipsniu taisyklė, o 67 ir 68 — ši taisyklė taikoma atbulai, 69 — trupmenos kėlimo natūraliuoju laipsniu taisyklė, o 70 — ši taisyklė taikoma atbulai, 71 ir 72 — laipsnio kėlimo natūraliuoju laipsniu taisyklė, 73–75 — taikomos įvairios laipsnio savybės. Kartojimui skirti 76–85 pratimai. Sprendžiant 76 pratimą vertėtų pakartoti veiksmų atlikimo tvarką. Be to, kartojama gretutinių kampų savybė (77), mastelis (78), atstumas tarp tiesės taškų (80), tekstinių uždavinių sprendimas sudarant lygtis (81 ir 82), magiškasis kvadratas (83). Pratimai 84 ir 85 skirti pastabumui ugdyti.

19–26 — visiems;

27 — gabesniems.

66. a) a^7b^7; b) $x^4y^4z^4$; c) $32x^5$; d) $9a^2$; e) $0{,}027x^3$; f) $-100\,000a^5b^5$; g) $\frac{1}{8}m^3n^3$; h) $1\frac{9}{16}a^2b^2c^2$.

67. a) $(ab)^4$; b) $(mnh)^3$; c) $(-xy)^5$; d) $(2a)^7$; e) $(3x)^4$; f) $(0{,}2ab)^3$; g) $(-0{,}3x)^3$; h) $\left(\frac{3}{5}m\right)^4$.

68. a) 100 000; b) 64; c) 1; d) 81; e) 1; f) -1.

Galima mokiniams pasiūlyti keletą punktų atlikti netaikant formulės $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ (pvz., e).

69. a) $\frac{8}{125}$; b) $\frac{81}{256}$; c) $\frac{x^5}{32}$; d) $\frac{27y^3}{125}$; e) $-\frac{z^3}{1000}$; f) $\frac{16\,807a^5}{32b^5}$; g) $\frac{0{,}0016b^4}{81c^4}$; h) $\frac{36a^2b^2}{49c^2d^2}$.

70. a) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$; b) $\left(\frac{ab}{c}\right)^5$; c) $\left(-\frac{x}{y}\right)^7$; d) $\left(\frac{2m}{n}\right)^6$;
e) $\left(\frac{5x}{y}\right)^3$; f) $\left(-\frac{30}{a}\right)^3$; g) $\left(\frac{2a}{bc}\right)^7$; h) $\left(\frac{x}{5}\right)^{10}$.

71. *Nurodymas.* Atkreipkite dėmesį į punktų d), g) ir h) sprendimą:
d) $(-5^3)^3 = (-1\cdot 5^3)^3 = (-1)^3\cdot(5^3)^3 = -1\cdot 5^9 = (-1)^9\cdot 5^9 = (-1\cdot 5)^9 =$
$= (-5)^9$.
g) $(-x^8)^3 = (-1\cdot x^8)^3 = (-1)^3\cdot(x^8)^3 = -1\cdot x^{24} = -x^{24}$;
h) $(-y^4)^6 = (-1\cdot y^4)^6 = (-1)^6\cdot(y^4)^6 = 1\cdot y^{24} = y^{24}$.
Be abejo, taip „kankinti" mokinius neverta. Be to, sprendžiant g) punktą gaunamas reiškinys $(-x^{24})$, kurio neįmanoma užrašyti laipsniu, todėl šio punkto geriau iš viso nenagrinėti. Taip pat galima praleisti ir formalius d) ir h) punktus.
Atsakymas. a) 3^6; b) 7^{10}; c) $(0{,}9)^{12}$; d) $(-5)^9$; e) a^{12}; f) b^{14}; g) neįmanoma; h) y^{24}.

72. a) $2^6, 2^8, 2^{12}$; b) $5^4, 5^9, 5^{12}$.

73. *Nurodymas.* Punktus c) ir d) galima spręsti dvejaip:
c) $(a^2\cdot a^3)^4 = (a^{2+3})^4 = (a^5)^4 = a^{20}$ arba $(a^2\cdot a^3)^4 = (a^2)^4\cdot(a^3)^4 = a^8\cdot a^{12} = a^{20}$;
d) $(a\cdot a^5)^4 = (a^{1+5})^4 = (a^6)^4 = a^{24}$ $\quad (a\cdot a^5)^4 = a^4\cdot a^{20} = a^{24}$.
Atsakymas. a) a^{18}; b) a^{19}; c) a^{20}; d) a^{24}.

74. a) $2^{20} = (2^{10})^2 = (2^5)^4 = (2^4)^5 = (2^{10})^2$;
b) $2^{30} = (2^2)^{15} = (2^3)^{10} = (2^5)^6 = 4^{15} = 8^{10} = 32^6$.

75. a) 2048; b) 32; c) 27; d) 4; e) 10 000.

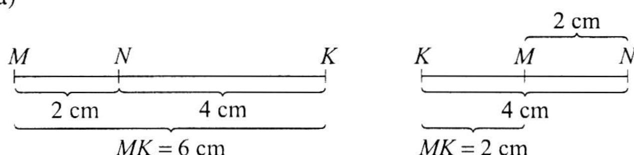
76. a) **B**; b) **C**; c) **A**; d) **C**.

77. a) 96° ir 84°; b) 60° ir 120°;
c) 84° ir 96°. *Nurodymas.* Mažesnįjį iš gretutinių kampų patogu pažymėti $7x$, tada kitas kampas bus $8x$. Lygtis $7x + 8x = 180°$.

78. 120 mm = 12 cm, 180 km = 18 000 000 cm; 12 cm žemėlapyje atitinka 18 000 000 cm vietovėje, todėl 1 cm žemėlapyje atitinka $\frac{18\,000\,000}{12} = 1\,500\,000$ (cm) vietovėje.
Atsakymas. 1 : 1 500 000.

79. a) 200 g;
b) 200 g tirpalo yra 5 g druskos, todėl druska sudaro $\frac{5}{200}$ tirpalo, t. y. $\frac{5\cdot 5}{200\cdot 5} = \frac{25}{1000}$ tirpalo. Vadinasi, tirpalo koncentracija yra 25‰.

80. a)



b) 2,04 m; 1,96 m.

81. Tarkime, kad per dieną darbininkai planavo pagaminti x staklių. Tuomet per 20 dienų jie pagamintų $20x$ staklių. Jei kasdien gamintų $(x + 2)$ stakles, tai per 18 dienų pagamintų $18(x + 2)$ staklių. Kadangi abiem atvejais užsakymas būtų atliktas, tai $20x = 18(x + 2)$, $x = 18$.
Atsakymas. a) 18; b) 20; c) 360; d) 36.

82. Tarkime, kad pirmojo dviratininko greitis yra x km/h. Per dvi valandas jis nuvažiavo $2x$ kilometrų. Antrasis dviratininkas nuvažiavo $(42 - 2x)$ km. Sudarome lygtį: $2x - (42 - 2x) = 2$, $x = 11$. Pirmojo dviratininko greitis yra 11 km/h, antrojo — $\frac{42-2\cdot 11}{2} = 10$ (km/h).

83. Kadangi įstrižainėje suma −15, tai pirmoje eilutėje reikia rašyti −9 ir t. t.

−4	−9	−2
−3	−5	−7
−8	−1	−6

84. a) Kadangi matome surašytus iš eilės einančių skaičių kvadratus, tai galima spėti, kad pirmas skaičius bus $4 = 2^2$, šeštas — $49 = 7^2$, septintas — $64 = 8^2$. Tą patį rezultatą gausime, jei samprotausime taip: skirtumai tarp skaičių didėja 2, todėl pirmas skaičius bus $9 - 5 = 4$, šeštas skaičius $36 + 13 = 49$, septintas $49 + 15 = 64$. Kodėl abiem atvejais gauname tą patį rezultatą, paaiškina tapatybė $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$.
b) Ę; 7; Ė; 10.

85. VI≠I arba VT=I

Čia, žinoma, pokštas vaizduotei lavinti.

1.4. Laipsnis su sveikuoju neigiamuoju rodikliu

Šiame skyrelyje praplečiama laipsnio sąvoka — apibrėžiamas laipsnis su sveikuoju neigiamuoju rodikliu: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Kad toks laipsnio apibrėžimas yra logiškas, o ne šiaip susitarimas, pagrindžiama pavyzdžiu. Suprantama, kad realiame gyvenime mokiniai nesutiks užrašo 5^{-3}. Laipsniai su neigiamaisiais rodikliais praktiškai taikomi užrašant skaičius standartine išraiška (žr. 6 skyrelį). Pagrindinėje mokykloje daugiau laipsnio sąvoka nebus plėtojama — tai bus daroma 11 klasėje.

Pakartoti:
laipsnių su vienodais pagrindais dalybą;
veiksmus su paprastosiomis trupmenomis.

Išmokti kelti racionalųjį skaičių sveikuoju neigiamuoju laipsniu.

Šiame skyrelyje:

1. Priminus, kaip dalijami laipsniai su vienodais pagrindais: $a^m : a^n = a^{m-n}$, kai $a \neq 0$ ir $m \geqslant n$, iškeliama problema: kas bus, kai $m < n$? Tuo tikslu išnagrinėjamas pavyzdys $5^2 : 5^5 = \frac{1}{5^3}$ ir paaiškinama, kodėl patogu susitarti, jog $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$.
2. Teigiama, kad tokio susitarimo laikomasi, kai laipsnio rodiklis yra bet kuris sveikasis neigiamasis skaičius, t. y.
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0).$$
3. Pateikiami pavyzdžiai ir suformuluojamos bei įrodomos taisyklės:
$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (a \neq 0,\ b \neq 0).$$
4. Pavyzdžiais parodoma, kaip sveikuoju neigiamuoju laipsniu keliamas mišrusis skaičius ar dešimtainė trupmena.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 86–91 pratimai. Temai įtvirtinti vadovėlyje pateikiami uždaviniai ir pratimai yra nesudėtingi — vieno–trijų žingsnių. Nepatartina mokytojui nuo savęs prigalvoti sudėtingų skaitinių ar raidinių reiškinių. Svarbiausia, kad mokiniai išmoktų taikyti formulę $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Galima pasiūlyti papildomai išspręsti ir paprasčiausių lygčių ir nelygybių, pvz.: $(*)^{-3} = \frac{1}{2^3}$, $(*)^{-2} = \frac{1}{16}$, $(-2)^{-*} = -\frac{1}{8}$, $5^* < 1$, $\frac{1}{27} \leqslant 3^* < 27$.

Likę pratimai — kartojimo. Iš dalies prie kartojimo būtų galima priskirti ir 91 pratimą, nes čia primenami kai kurie ilgio, ploto bei tūrio matavimo vienetai. Be to, kartojamos ankstesniuose skyreliuose nagrinėtos laipsnio savybės (92), kvadratinė šaknis iš skaičiaus (93), standartinė skaičiaus išraiška (94), raidinių reiškinių sudarymas (95), kubo tūrio skaičiavimas (96), kampų, gautų dvi lygiagrečias tieses perkirtus trečiąja, savybės (97), atskliautimas ir panašiųjų narių sutraukimas (98), aritmetinio vidurkio (99), skaičiaus modulio ir trupmeninių skaitinių reiškinių reikšmių (101) radimas, visumos radimas, kai žinoma dalis, išreikšta procentais ir trupmena (102), tekstinių uždavinių sprendimas sudarant lygtis (103). 100 pratimas sprendžiamas bandymų ir klaidų metodu. 104 pratimą rekomenduojama atlikti namuose.

28–35

86. a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{1}{9}$; c) $\frac{1}{125}$; d) $\frac{1}{16}$; e) $\frac{1}{b^5}$; f) $\frac{1}{16b^4}$; g) $\frac{1}{a+2}$; h) $\frac{1}{x^3y^3}$.

87. a) 6^{-5}; b) 10^{-3}; c) 7^{-1}; d) 2^{-3}; e) a^{-1};
f) $(xy)^{-1}$; g) b^{-2}; h) $(x+y)^{-1}$.

88. a) $2^2, 2^1, 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-5}$; b) $3^{-4}, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^0, 3^1, 3^3$;
c) $5^{-4}, 5^{-3}, 5^0, 5^2, 5^3$; d) $10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$.

89. a) $\frac{1}{32}$; b) 0,000001; c) 2,25; d) -1; e) $\frac{9}{16}$;
f) $\frac{1}{8}$; g) $-6{,}25$; h) $\frac{13}{36}$; i) $-\frac{35}{36}$; j) 0,2.

Atkreipkite mokinių dėmesį, kad:
g) $-0{,}4^{-2} \neq (-0{,}4)^{-2}$;
i) $-1{,}7^0 \neq (-1{,}7)^0$.

90. a) 0,001; b) 0,5; c) 0,25; d) 0,008; e) 0,25; f) 0,0625; g) 0,4.

91. a) 10^{-1} m; 10^{-2} m; 10^{-3} m; b) 10^{-2} m^2; 10^{-4} m^2; 10^{-6} m^2;
c) 10^{-3} m^3; 10^{-6} m^3; 10^{-9} m^3.

92. a) 25; b) 2; c) 1; d) 0,216.

93. a) 0,11; b) $\frac{13}{14}$; c) 0,05; d) $2\frac{1}{5}$.

94. a) $1{,}6 \cdot 10^5$; b) $8{,}79 \cdot 10^5$; c) $1{,}48 \cdot 10^3$;
d) $7{,}5 \cdot 10^6$; e) $2{,}3 \cdot 10^3$; f) $5{,}1 \cdot 10^8$.

Šio pratimo nereikėtų praleisti, nes 6 skyrelyje tai pravers.

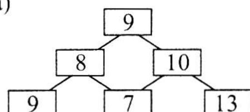
95. a) $(5a+b)^2$; b) $(3x)^2 + y^2$; c) $(81m - 25n)^3$; d) $(4c)^3 - (3d)^3$.

96. Bako, kurio briauna du kartus ilgesnė, tūris lygus 8 pradinio bako tūriams. Taigi laiko prireiks 8 kartus daugiau: $15 \cdot 8 = 120$ (min) $= 2$ (h).

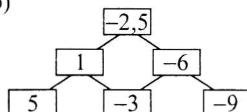
97. a) $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 6 = 149°$; $\angle 2 = \angle 5 = \angle 7 = 31°$; b) $x = 10°$; $y = 50°$.

98. a) $1 - y$; b) $9x$.

99. a)



b)



100. Surašome visus keturženklius skaičius, kurių skaitmenys eina iš eilės: 1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789.
Sukeiskime jų pirmus du skaitmenis vietomis:
2134, 3245, 4356, 5467, 6578, 7689.
Patikriname, kuris iš šių skaičių tenkina uždavinio sąlygą: skaičiai 5467, 6578 netinka, nes nėra tokio natūraliojo skaičiaus, kurio kvadratas baigtųsi skaitmeniu 7 ar 8; 2134 netinka, nes dalijasi iš 2, bet nesidalija iš 4; 3245 netinka, nes skaičių, kurie baigiasi 5, kvadratai baigiasi 25; 7689 netinka, nes dalijasi iš 3, bet nesidalija iš 9. Liko $4356 = 4 \cdot 1089 = 4 \cdot 9 \cdot 121 = 66^2$. Įsitikinti, kad 4356 tinka, galima ir kitaip. Jeigu $x^2 = 4356$, tai $3600 < x^2 < 4900$, $60 < x < 70$, taigi x-o dešimčių skaitmuo 6. Vienetų skaitmuo gali būti tik 4 arba 6. Bet $64^2 < 65^2 = 4225$, todėl lieka tik 66. Jis tikrai tinka: $66^2 = 4356$, nes $33^2 = 1089$, $11^2 = 121$.
Atsakymas. 3456.

Sprendžiame bandymų ir klaidų metodu.

101. a) $-1\frac{1}{3}$; b) 2,28.

102. Visas kelias lygus $\frac{10,5 \cdot 100}{15} = 70$ (km). Antrą dieną turistai nuėjo $70 \cdot \frac{2}{7} =$ $= 20$ (km). Turistams liko eiti $70 - 10,5 - 20 = 39,5$ (km).

103. Sakykime, kad dabar yra x valandų. Tada likusi paros dalis bus $2x$ valandų. Sudarome lygtį: $x + 2x = 24$, $x = 8$.

104. Pirmiausia reikia išsiaiškinti, kaip teisingai suprasti lenteles. Pavyzdžiui, I pogrupio lentelės eilutės 8^a susikirtimo su stulpeliu 8^b langelyje įrašytas rezultatas 50:40, o eilutės 8^b susikirtimo su stulpeliu 8^a langelyje — rezultatas 40:50. Tai reiškia, kad 8^a klasės komanda laimėjo prieš 8^b klasės komandą rezultatu 50:40. Po to suskaičiuoti komandų surinktus taškus.

Šį uždavinį galima pasiūlyti išspręsti sportininkams ir ypač tiems, kurie gerai apie save galvoja.

a) I pogrupis

Klasė	Taškai	Vieta
8^a	3	I
8^b	1	III
8^c	0	IV
8^d	2	II

II pogrupis

Klasė	Taškai	Tarpusavio rungtynėse			Vieta
		Įmesta	Praleista	Skirtumas	
9^a	3				I
9^b	1	100	117	−17	IV
9^c	1	130	117	+13	II
9^d	1	112	108	+4	III

III pogrupis

Klasė	Taškai	Pastaba	Vieta
8^a	1	laimėjo prieš 8^d	III
8^b	2	laimėjo prieš 8^c	I
8^c	2	pralaimėjo prieš 8^b	II
8^d	1	pralaimėjo prieš 8^a	IV

IV pogrupis

Klasė	Taškai	Tarpusavio rungtynėse			Vieta
		Įmesta	Praleista	Skirtumas	
9^a	1	113	114	−1	III
9^b	1	104	109	−5	IV
9^c	1	118	112	+6	II
9^d	3				I

b) Ne, nes kiekviename pogrupyje žaidžiamos 6 rungtynės, o komandų yra keturios.

c) Taip, jeigu 3 komandos tarpusavio rungtynėse pelno po vieną pergalę ir visos pralaimi ketvirtai komandai (taip atsitiko II ir IV pogrupio komandoms), o jų tarpusavio rungtynėse (kiekvienos komandos abejose rungtynėse su kitomis dviem trejetuko komandomis) įmestų ir praleistų taškų skirtumas vienodas.

1.5. Laipsnių su sveikuoju rodikliu veiksmai

Šiame skyrelyje pavyzdžiais parodoma, kad visos 2 ir 3 skyreliuose pateiktos laipsnių su natūraliuoju rodikliu savybės tinka ir laipsniams su sveikaisiais (neigiamaisiais) rodikliais. Šiuo skyreliu praktiškai ir baigiami nagrinėti laipsniai pagrindinės mokyklos kurse.

Pakartoti:
laipsnio su sveikuoju neigiamuoju rodikliu apibrėžimą;
laipsnių su natūraliuoju rodikliu savybes.

Išmokti:
prastinti reiškinius su laipsniais;
taikyti laipsnių savybes.

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiais įsitikinama, kad laipsnių su natūraliaisiais rodikliais savybės tinka ir laipsniams su sveikaisiais rodikliais.
2. Teigiama, kad kai $a \neq 0$, $b \neq 0$ ir $m, n \in \mathbf{Z}$, galioja lygybės:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Pastaba. Reikėtų pabrėžti, kad šios lygybės dažnai praverčia ir taikant atbulai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 105–113 pratimai. Jiems išspręsti taikomos teorinėje dalyje pateiktos laipsnių su sveikuoju rodikliu savybės. Be to, reikia prisiminti ir skaičiaus, nelygaus nuliui, nulinio laipsnio savybę bei veiksmų atlikimo tvarką.
Tarp kartojimui skirtų pratimų yra kvadratinės ir kubinės šaknies iš skaičiaus radimas (114), sąlygos užrašymas reiškiniu (115), skaičiaus užrašymas standartine išraiška (116), tekstinių uždavinių sprendimas sudarant lygtis (117), trikampio elementų radimas (118, 119, 124), reiškinių prastinimas (120), promilių skaičiavimas (121), dalumo iš 2 ir 3 požymių taikymas (123), kombinatorikos propedeutika (125), dėsningumų pastebėjimas (126). 36–43

105. a) 216; b) $\frac{1}{9}$; c) 15 625; d) 0,01; e) 1; f) $\frac{1}{12}$;
g) 3; h) 25; i) $\frac{1}{64}$; j) -27; k) 1,44; l) 5.

106. a) $2^3, 2^0, 2^2$; b) $3^{-1}, 3^5, 3^{-5}$; c) $5^1, 5^{-1}, 5^{-6}$; d) $10^7, 10^2, 10^0$.

107. a) 3; b) 8; c) $\frac{1}{7}$; d) 32; e) $\frac{1}{9}$; f) $\frac{1}{4}$; g) 1000;
h) 8; i) $\frac{1}{3125}$; j) $\frac{1}{4}$; k) 1; l) 1 000 000.

108. a) $6a^{-1}$; b) $6x$; c) y^{-1}; d) 0,1; e) $2{,}5a$; f) $0{,}18z^{-2}$; g) x^5;
h) $1{,}3b^2$; i) $4p^7$; j) $-4c^{-7}$; k) -13; l) $400x^{-7}$.

109. a) 6; b) 44,7; c) 1757,8125; d) -1; e) 6; f) $\frac{11}{27}$.

110. a) **A**; b) **C**; c) **C**; d) **A**.

111. a) $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$; $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$.
Kadangi $8^{100} < 9^{100}$ ($8 < 9$, o laipsnio rodikliai lygūs), tai $2^{300} < 3^{200}$;
b) $9^{10} = 81^5$, nes $81^5 = (9^2)^5 = 9^{10}$;
c) $10^3 < 2^4 \cdot 5^3$, nes $2^4 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 2 \cdot 10^3$.

112. a) 21^8; b) 10^{11}; c) 24^3; d) 30^2.

113. a) $(-2)^{-3} - (-3)^{-2} = -\frac{17}{72}$; b) $3^0 - 0^3 = 1$.

114. a) 0,5; b) 0,08; c) 0,5; d) 0,4.

115. a) Per 1 h automobilis nuvažiavo 100 km, todėl per t valandų nuvažiuos $100t$ kilometrų.
b) Per 1 h automobilis nuvažiavo 80 km, todėl per p valandų nuvažiuos $80p$ kilometrų.
c) $(t + p)$ h.
d) Iš viso automobilis nuvažiavo $(100t + 80p)$ km ir sugaišo $(t + p)$ h. Taigi vidutinis automobilio greitis yra $\frac{100t+80p}{t+p}$ km/h.

116. a) 132 000; b) 2003; c) 52 790; d) 910 000 000.

117. Sakykime, kad iš viso yra x pieštukų. Tada pirmoje dėžutėje yra $\frac{1}{4}x$, antroje — $\frac{1}{4}x + 15$, o trečioje — 25 pieštukai. Sudarome lygtį:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x + 15 + 25 = x, \quad x = 80; \quad \frac{1}{4} \cdot 80 = 20, \quad 20 + 15 = 35.$$

Atsakymas. Pirmoje dėžutėje yra 20, antroje — 35, o trečioje — 25 pieštukai.

118. Vienos trikampio kraštinės ilgį patogu žymėti $5x$. Tada kitų kraštinių ilgiai bus $4x$ ir $3x$. Sudarome lygtį: $5x + 4x + 3x = 41$, $x = \frac{41}{12}$; $5 \cdot \frac{41}{12} = 17\frac{1}{12}$, $4 \cdot \frac{41}{12} = 13\frac{2}{3}$, $3 \cdot \frac{41}{12} = 10\frac{1}{4}$.
Atsakymas. Trikampio kraštinių ilgiai yra $17\frac{1}{12}$ cm, $13\frac{2}{3}$ cm, $10\frac{1}{4}$ cm.

119. a) $x = y = \frac{180°-66°}{2} = 57°$; b) $x = 42°$, $y = 96°$; c) $x = 44°$, $y = 46°$; d) $x = 22°$, $y = 68°$; e) $x = 56°$, $y = 23°$; f) $x = 32°$, $y = 116°$.

Vadovėlyje d) brėžinyje praleistas stataus kampo žymėjimo ženkliukas.

120. a) $-7n - 1$; b) $m + 0{,}6n$.

121. Laikykime, kad 1 ℓ vandens sveria 1 kg. Tada 1000 ℓ = 1000 kg = 1 000 000 g. Sudarome proporciją:

$$\begin{matrix} 1\,000\,000\,\text{g} — 1000‰ \\ 300\,\text{g} — x‰ \end{matrix} \longrightarrow x = 0{,}3‰.$$

Atsakymas. 0,3‰.

122. Upės tėkmės greitis yra $34{,}2 - 32{,}8 = 1{,}4$ (km/h), o katerio greitis prieš srovę $32{,}8 - 1{,}4 = 31{,}4$ (km/h).

123. *Nurodymas.* Reikia prisiminti skaičių dalumo iš 2 ir 3 požymius:
iš 2 dalijasi tik tie skaičiai, kurių paskutinis skaitmuo yra 0, 2, 4, 6, 8;
iš 3 dalijasi tik tie skaičiai, kurių skaitmenų suma dalijasi iš 3.

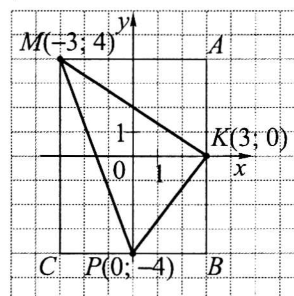
a)	6030	6032	6034	6036	6038
	6130	6132	6134	6136	6138
	6230	6232	6234	6236	6238
	6330	6332	6334	6336	6338
	6430	6432	6434	6436	6438
	6530	6532	6534	6536	6538
	6630	6632	6634	6636	6638
	6730	6732	6734	6736	6738
	6830	6832	6834	6836	6838
	6930	6932	6934	6936	6938

b)	6030	6132	6231	6330	6432	6531	6630	6732	6831	6930
	6033	6135	6234	6336	6435	6534	6633	6735	6834	6933
	6036	6138	6237	6339	6438	6537	6636	6738	6837	6936
	6039			6639			6939			6939

c)	6030	6234	6438	6732
	6036	6330	6534	6738
	6132	6336	6630	6834
	6138	6432	6636	6930
				6936

Pastaba. Kaip matome, surašyti visus skaičius ilgas ir nuobodus darbas. Geriau truputėlį pakeisti sąlygą: „Kokie skaičiai pavidalo $\overline{6{*}3{*}}$ dalijasi iš..." Tada užtenka pastebėti, kad: a) paskutinis skaitmuo lyginis, antras — bet koks; b) antro ir ketvirto skaitmenų suma lygi 0, 3, 6 arba 9; c) ketvirtas skaitmuo lyginis, o antro ir ketvirto skaitmenų suma lygi 0, 3, 6 arba 9.

124. $S_{MKP} = S_{ABCM} - S_{MAK} - S_{KBP} - S_{MCP} = 48 - 12 - 6 - 12 = 18$.
Atsakymas. 18 (ploto vienetų).



125. E.

126. Skiriasi figūra **C**. Figūros **A**, **B**, **D**, **E** gaunamos viena iš kitos pasukant, o **C** — dar ir apverčiant.

1.6. Standartinė skaičiaus išraiška

7 klasėje buvo mokoma standartine išraiška užrašyti didelius teigiamuosius skaičius. Šiame skyrelyje mokoma ir labai mažus teigiamuosius skaičius užrašyti standartine išraiška — tam reikia naudotis neigiamuoju rodikliu.
Skaičiaus užrašas standartine išraiška dažnai vartojamas aprašant įvairius gamtoje ar realiame gyvenime vykstančius reiškinius. Taip galima pateisinti laipsnio su neigiamuoju rodikliu nagrinėjimą.

Pakartoti:
skaičiaus skyrius;
laipsnio su neigiamuoju rodikliu apibrėžimą;
standartinę skaičiaus išraišką: $a \cdot 10^n$, kai $n \in N$;
skaičiaus užrašymą trumpuoju būdu.

Išmokti:
užrašyti labai mažus teigiamuosius skaičius standartine išraiška, t. y. pavidalu $a \cdot 10^n$, kai $1 \leqslant a < 10$, $n \in Z$;
nustatyti skaičiaus, užrašyto standartine išraiška, eilę;
palyginti skaičius, užrašytus standartine išraiška.

Šiame skyrelyje:

1. Primenama, kaip užrašomi standartine išraiška labai dideli skaičiai, kaip nustatoma skaičiaus eilė. Pastebima, kad didelių skaičių eilė n yra teigiamasis skaičius.
2. Teigiama, kad standartine išraiška galima užrašyti ir labai mažus teigiamuosius skaičius. Kaip pavyzdys standartine išraiška užrašytas plauko storį išreiškiantis skaičius.
3. Pateiktas standartinės skaičiaus išraiškos apibrėžimas:

> *Skaičiaus užrašas pavidalu $a \cdot 10^n$, kai $1 \leqslant a < 10$, o n — sveikasis skaičius, vadinamas standartine išraiška. Rodiklis n vadinamas skaičiaus eile.*

4. Pastebima ir parodoma pavyzdžiais, kad mažesnių už vienetą skaičių eilė yra neigiamasis skaičius.
5. Kaip iš skaičiaus standartinės išraiškos eilės galima spręsti apie skaičiaus dydį, turėtų atsakyti mokiniai: kuo didesnė skaičiaus eilė, tuo didesnis ir pats skaičius; jei skaičiaus eilė didesnė už 0, tai skaičius didesnis už 1, jei eilė mažesnė už 0, tai — mažesnis už 1, jei lygi 0, tai skaičius yra tarp 1 ir 10.
6. Užduotyje pateiktą lentelę patartina panagrinėti klasėje, o į klausimus mokiniai galėtų atsakyti namie.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

127–135 uždaviniai yra teminiai. 135 pratimas kartu yra ir kartojimo, nes reikia prisiminti stačiakampio gretasienio tūrį, o kubo tūrį ir medžiagos masės priklausomybę nuo tūrio pakartosite spręsdami 139 uždavinį.
Be to, skyrelyje kartojama palūkanų norma (136), reiškinio sudarymas (137), trikampio kampų sumos savybė (138), skaitinio reiškinio reikšmės (140) ir vidutinio greičio (141) radimas, lygties sudarymas ir sprendimas (142), darbo užmokesčio skaičiavimas (143). Taip pat rasite ir galvosūkį (144).

44–46 — visiems;
47–52 — gabesniems.

127. a) Penkta; b) septinta; c) minus trečia; d) minus ketvirta.

128. a) $5{,}6 \cdot 10^2$; b) $7{,}002 \cdot 10^3$; c) $1{,}1 \cdot 10$; d) $2 \cdot 10^{-1}$; e) $4 \cdot 10^{-2}$;
f) $5{,}6 \cdot 10^{-2}$; g) $8{,}5 \cdot 10^{-1}$; h) $4{,}27 \cdot 10^7$; i) $5 \cdot 10^4$; j) $4{,}1 \cdot 10^{-4}$;
k) $8{,}3 \cdot 10^{-6}$; l) 10^6.

129. a) 10^{-1}; b) 10^{-2}; c) 10^{-3}; d) 10^{-4}; e) 10^{-5}.

130. a) 0,002; b) 0,014; c) 0,0065; d) 0,000905.

131. a) $4 \cdot 10^5$; b) 10^{10}; c) $5 \cdot 10^{-9}$.

132. 4,2 mlrd. $= 4{,}2 \cdot 10^9$; 12,3 mlrd. $= 1{,}23 \cdot 10^{10}$; 8,7 mlrd. $= 8{,}7 \cdot 10^9$.

133. $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ mm.

134. a) Skaičių 3430 užrašykime standartine išraiška, t. y. $3430 = 3{,}43 \cdot 10^3$. Taigi $n = 3$.
b) 4; c) 7; d) 6; e) -1; f) -3.

135. Kambario tūris lygus $4 \cdot 5 \cdot 2{,}5 = 50$ (m^3). Anglies dioksidas neturi viršyti $0{,}2 \cdot 10^{-2} \cdot 50 = 0{,}1$ (g).
Atsakymas. Ne daugiau kaip 0,1 g.

136. $100\% + 4\% = 104\%$; $568 \cdot 1{,}04 = 590{,}72$ (Lt).

137. a) $70 + b$; b) $10x + 3$; c) $100c + 40$; d) $100p + q$;
e) $100a + 10b + c$; f) $100a + 3$.

138. a) Vieną kampą patogu pažymėti $2x$. Tada kiti kampai bus $3x$ ir $7x$. Sudarome lygtį: $2x + 3x + 7x = 180°$, $x = 15°$; $2 \cdot 15° = 30°$, $3 \cdot 15° = 45°$, $7 \cdot 15° = 105°$;

b) Sprendžiame lygtį $3x + 4x + 8x = 180°$.

Atsakymas. a) 30°, 45°, 105°; b) 36°, 48°, 96°.

139. a) Kubo, kurio briauna lygi 10 cm, tūris lygus $1000\,\text{cm}^3$, o jo masė bus $0{,}63 \cdot 1000 = 630\,(\text{g})$;

b) 2126,25 g;

c) 2126,25 kg.

140. a) $1\frac{3}{5}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $-1\frac{1}{6}$; d) $-2{,}8$.

141. *Nurodymas.* Vidutinis greitis = visas kelias : visas laikas.

$\frac{63{,}2 \cdot 2 + 76{,}5 \cdot 3}{2+3} = 71{,}18\,(\text{km/h})$.

142. 5; 8; 10.

143. *Nurodymas.* Tarifinis atlyginimas = valandinis atlygis × darbo laikas.

a) 1075,7 Lt;

b) $1075{,}7 \cdot 0{,}01 \approx 10{,}76\,(\text{Lt})$;

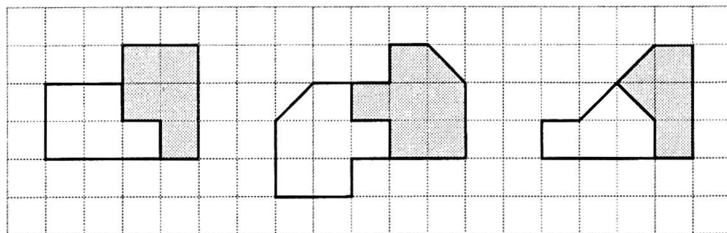
c) $(1075{,}7 - 214) \cdot 0{,}33 \approx 284{,}36\,(\text{Lt})$;

d) $1075{,}7 - 10{,}76 - 284{,}36 = 780{,}58\,(\text{Lt})$.

Nuo 2000 01 01 mokestis *SODRAI* yra $1075{,}7 \cdot 0{,}03 \approx 32{,}27\,(\text{Lt})$, todėl staklininkas į rankas gavo $1075{,}7 - 32{,}27 - 284{,}36 = 759{,}07\,(\text{Lt})$.

Fizinių asmenų mokestis *SODRAI* nuo 2000 01 01 yra 34%; iš jų 31% moka darbdavys, o 3% — darbuotojas.
Atsakymus apvaliname iki centų.

144.



2. KVADRATINĖ ŠAKNIS

Jau 7 klasėje mokiniai buvo mokomi traukti kvadratinę šaknį iš neneigiamojo skaičiaus. Jie susipažino su kvadratinės šaknies žymėjimu ir apibrėžimu. Šiame skyriuje pakartojamas kvadratinės šaknies apibrėžimas, mokoma apskaičiuoti kvadratinės šaknies reikšmę skaičiuokliu, traukti kvadratinę šaknį iš sandaugos bei trupmenos, pertvarkyti reiškinius su kvadratinėmis šaknimis įkeliant dauginamąjį po šaknies ženklu arba iškeliant dauginamąjį prieš šaknies ženklą bei palyginti reiškinius, kai juose yra kvadratinės šaknys. Sunkiau įsimenamos bei suvokiamos taisyklės $(\sqrt{a})^2 = a$ ir $\sqrt{a^2} = |a|$. Reikėtų jas vis pakartoti paprasčiausiais žodžiu sprendžiamais pavyzdžiais.

Pagrindinis skyriaus tikslas — išmokyti kvadratinių šaknų savybių. Mokyti naudotis skaičiuokliu skaičiuojant skaitinių reiškinių su kvadratinėmis šaknimis reikšmes.

2.1. Kas yra kvadratinė šaknis?

Tai kartojimo skyrelis. Jis skirtas kvadratinės šaknies sąvokai įtvirtinti. Kvadratinės šaknies sąvoka mokiniams jau yra žinoma. 7 klasėje kvadratinė šaknis iš skaičiaus buvo aiškinama geometrijos pavyzdžiu: reikėjo rasti kvadrato kraštinės ilgį, kai žinomas kvadrato plotas. Taip pat buvo paaiškinta, kad kvadratinė šaknis iš neigiamojo skaičiaus neturi prasmės, nes nėra tokio skaičiaus, kurį pakėlę kvadratu gautume neigiamąjį skaičių. Reikėtų prisiminti, kad kvadratinės šaknies traukimas yra veiksmas, atvirkštinis kėlimui kvadratu. Labai svarbu, kad mokiniai įsisąmonintų, kad kvadratinės šaknies pošaknis ir rezultatas (šaknis) negali būti neigiami.

Pakartoti:

teigiamojo, neigiamojo ir mišriojo skaičiaus kėlimą antruoju laipsniu (kvadratu);

skaičių apvalinimo taisykles;

veiksmų atlikimo tvarką.

Išmokti:

apskaičiuoti apytikslę kvadratinės šaknies reikšmę skaičiuokliu;

taikyti formulę $(\sqrt{a})^2 = a$, kai $a \geqslant 0$.

Šiame skyrelyje:

1. Primenama, kaip traukiama kvadratinė šaknis.
2. Pakartojamas kvadratinės šaknies apibrėžimas:

> *Kvadratine šaknimi iš neneigiamojo skaičiaus a vadinamas toks neneigiamasis skaičius, kurio kvadratas lygus a.*

3. Kvadratinės šaknies apibrėžimas nusakomas ir taip: jei kvadratinę šaknį iš a pakelsime kvadratu, tai gausime a, t. y. $(\sqrt{a})^2 = a$ $(a \geqslant 0)$.
4. Mokoma skaitinių reiškinių su šaknimis reikšmes skaičiuoti skaičiuokliu.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Kvadratinei šakniai pakartoti ir žinioms gilinti skirti 145–158 uždaviniai. Kvadratinės šaknies reikšmei rasti skaičiuokliu yra 157 ir 158 pratimai. Likę uždaviniai — kartojimo. Pravartu pakartoti skritulio ploto formulę (156, 158), kampų prie lygiagrečių tiesių ir kirstinės savybes (159), lygčių sudarymą sprendžiant tekstinius uždavinius (160), procentus (161), paprastųjų trupmenų reiškimą dešimtainėmis (162). (163) — dėsningumų ieškojimas.

1–11

145. a) 12; 15; 17; 16; b) 18; 21; 26; 27;
c) 31; 46; 94; d) 2,5; 0,13; 1,8; 3,2.

Galima spręsti mintinai. (Pirmiausia reikėtų paanalizuoti kvadratų lentelę, esančią 175 p.)

146. *Nurodymas.* Prieš pradedant spręsti šį uždavinį galima mokiniams pasiūlyti pavyzdį: $\sqrt{m} = 5$; šaknies reikšmė lygi 5 ir $5 > 0$, tai $m = 5^2 = 25$. Tuomet mokiniams bus aiškesnė sąlygos formuluotė.
Atsakymas. 0; 1; 81; 1,44; $\frac{1}{36}$; nėra; nėra; 0,0169; $2\frac{1}{4}$.

147. *Nurodymas.* Reikėtų atkreipti dėmesį į du paskutinius pavyzdžius bei aptarti, kaip šiuos reiškinius kelti kvadratu:
$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8$; $\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{9}{3} = 3$.
Atsakymas. 81; 2; 17; 4; $\frac{1}{3}$; 2,5; 0,04; 8; 3.

148. a) 9; b) 8; c) 12; d) −90; e) 30; f) 5;
g) 20; h) 0,44; i) $\frac{3}{4}$; j) $\frac{1}{2}$; k) −12; l) $\frac{1}{3}$.

149. a) 5; b) 7; c) 4; 8; d) 3; 7.

Išsprendus a) ir b) punktus galima padaryti išvadą, kad apskritai kalbant $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

150. a) $\sqrt{10\,000} = 100$, lygybė teisinga, nes $100 \geqslant 0$ ir $100^2 = 10\,000$;
b) $\sqrt{10\,000} = -100$, lygybė neteisinga, nes $-100 < 0$, nors $(-100)^2 = 10\,000$;
c) $\sqrt{1000} = 10$, lygybė neteisinga, nes $10^2 \neq 1000$, nors $10 > 0$;
d) $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, lygybė teisinga, nes $4\sqrt{2} > 0$ ir $(4\sqrt{2})^2 = 16 \cdot 2 = 32$;
e) $\sqrt{\frac{4}{625}} = -\frac{2}{25}$, lygybė neteisinga, nes $-\frac{2}{25} < 0$, nors $\left(-\frac{2}{25}\right)^2 = \frac{4}{625}$;
f) $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, lygybė teisinga, nes $\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ ir $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

151. *Nurodymas.* Reikėtų pakartoti neigiamųjų skaičių palyginimo taisyklę: iš dviejų neigiamųjų skaičių didesnis yra tas, kurio modulis mažesnis.
a) $<$; b) $>$; c) $>$; d) $<$; e) $=$; f) $<$.

152. $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{0}$; $-\sqrt{1}$; $-\sqrt{2}$.

153. 1; 2; 3; a.

Galima spręsti mintinai.

154. *Nurodymas.* Atkreipkite dėmesį į matavimo vienetus, t. y. kaip keičiami kvadratiniais metrais arai bei hektarai, pavyzdžiui:
d) $62\,500\,\text{a} = 6\,250\,000\,\text{m}^2$, tai $a = \sqrt{S} = \sqrt{6\,250\,000} = 2500\,(\text{m})$ ir perimetras $P = 4a = 4 \cdot 2500 = 10\,000\,(\text{m}) = 10\,(\text{km})$.
Atsakymas. a) 20 m; b) 2,8 dm; c) 4,4 m; d) 10 km; e) 480 m.

155. a) 36; b) 0,81; c) $\frac{1}{16}$; d) nėra tokios t reikšmės.

Spręsdami taikykite šaknies apibrėžimą.

156. Prisiminę skritulio ploto formulę $S = \pi r^2$ gauname $r^2 = \frac{S}{\pi}$, $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$.
a) $r = \sqrt{\frac{64\pi}{\pi}} = \sqrt{64} = 8\,(\text{cm})$.
Galima būtų spręsti ir taip:
$S = \pi r^2$, tai $64\pi = \pi r^2$, $r^2 = 64$, $r = \sqrt{64} = 8\,(\text{cm})$;
b) 1,9 dm; c) 0,23 m; d) $\sqrt{7}$ m.

157. *Nurodymas.* Šis pratimas (kaip ir 158 pratimas) sprendžiamas naudojantis skaičiuokliu. Reikia prisiminti skaičių apvalinimo taisykles.
a) $\approx 4{,}24$ cm; b) $\approx 1{,}90$ dm; c) $\approx 0{,}79$ m; d) $\approx 0{,}73$ m.

Pasiūlykite mokiniams apskaičiuoti ir kvadrato perimetrą. Šiuo atveju galima paklausti, kada rezultatas bus tikslesnis: apvalinant kraštinės ilgį ar apvalinant perimetro reikšmę.

158. a) $\approx 1{,}3$ m; b) $\approx 2{,}0$ cm; c) $\approx 1{,}3$ dm; d) $\approx 0{,}3$ m.

159. $\angle y = 142°$, nes $\angle y$ ir $\angle C$ yra vidaus priešiniai kampai prie lygiagrečių tiesių BC ir AD bei jų kirstinės CD. $\angle x + 103° = 180°$, nes $\angle x$ ir $\angle B$ yra vidaus vienašaliai kampai prie tų pačių lygiagrečių tiesių ir kirstinės AB; $\angle x = 77°$.

160. $(2{,}4 - 0{,}28 \cdot 6) : 8 = 0{,}09\,(\text{t})$.
Vienos dėžės masė yra 0,09 tonos.

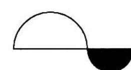
161. *Nurodymas.* Su mokiniais aptarkite, kuris skaičius atitinka 100% ir kokio skaičiaus procentus reikia surasti.
a) 100% atitinka 4000 Lt; 5000 Lt − 4000 Lt = 1000 Lt, tai

$$\begin{matrix} 4000\,\text{Lt} — 100\% \\ 1000\,\text{Lt} — x\% \end{matrix} \longrightarrow x = 25\%.$$

b) $x = 20\%$ (100% atitinka 5000 Lt).
Atsakymas. a) 25%; b) 20%.

162. *Nurodymas.* Pakartokite periodinių trupmenų užrašymą.
a) $\frac{4}{11} = 0{,}363636... = 0{,}(36) \approx 0{,}36$; b) $5\frac{4}{9} = 5{,}444... = 5{,}(4) \approx 5{,}44$.

163. Klaustuko vietoje piešiame figūrą, turinčią baltą ir juodą pusskritulius, ir palyginę su kitomis figūromis nustatome, kad baltasis pusskritulis turi būti nukreiptas aukštyn, o juodasis — žemyn.



2.2. Kvadratinė šaknis iš sandaugos ir trupmenos

Šiuo skyreliu pradedami nagrinėti veiksmai su kvadratinėmis šaknimis: mokoma traukti kvadratinę šaknį iš neneigiamųjų skaičių sandaugos ir trupmenos bei taikyti šias taisykles atbulai. Šių taisyklių įsisavinimas palengvina reiškinių su kvadratinėmis šaknimis pertvarkymus, kurie bus nagrinėjami 4 skyrelyje.

Pakartoti kvadratinės šaknies apibrėžimą.

Išmokti traukti kvadratinę šaknį iš sandaugos ir trupmenos.

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiu parodoma, kaip traukiama kvadratinė šaknis iš sandaugos, ir parašoma apibendrinta lygybė:

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0).$$

Pastaba. Su gabesniais mokiniais galite panagrinėti pavyzdį $\sqrt{(-4)\cdot(-9)}$ ir padaryti išvadą, kad taisyklę galima taikyti ir kai *abu* dauginamieji yra neigiami:

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}\quad (a<0, b<0).$$

2. Įsitikinama, kad ši lygybė iš tiesų teisinga:

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2=a\cdot b.$$

Pastaba. Šios lygybės įrodymą turėtų žinoti tik gabesnieji mokiniai.

3. Taisyklė nusakoma žodžiais:

> *Kvadratinė šaknis iš neneigiamųjų skaičių sandaugos lygi kvadratinių šaknų iš tų skaičių sandaugai.*

4. Pavyzdžiais parodoma, kad kvadratinės šaknies iš sandaugos taisyklė taikoma ir atbulai.
5. Analogiškai aiškinama ir šaknies iš trupmenos savybė. Pavyzdžiu parodoma, kaip traukiama kvadratinė šaknis iš trupmenos, ir parašoma apibendrinta lygybė:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad (a\geqslant 0,\ b>0).$$

Pastaba. Su gabesniais mokiniais galite panagrinėti pavyzdį $\sqrt{\frac{-4}{-9}}$.

6. Įsitikinama, kad ši lygybė iš tiesų teisinga:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}.$$

7. Taisyklė nusakoma žodžiais:

> *Kvadratinė šaknis iš trupmenos, kurios skaitiklis neneigiamas, o vardiklis teigiamas, lygi kvadratinės šaknies iš skaitiklio ir kvadratinės šaknies iš vardiklio dalmeniui.*

8. Pateikti kvadratinės šaknies iš trupmenos taisyklės taikymo pavyzdžiai ir parodoma, kad šią taisyklę galima taikyti ir atbulai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 164–168 uždaviniai. 164a–i, 167 ir 168 pratimuose taikoma kvadratinės šaknies iš sandaugos taisyklė, o 165 — ši taisyklė taikoma atbulai; 164j–o — kvadratinės šaknies iš trupmenos taisyklė, o 166 — ši taisyklė taikoma atbulai. Kiti uždaviniai skirti kartojimui. Reikėtų prisiminti reiškinių su kvadratinėmis šaknimis (169) ir laipsniais (170, 172) skaičiavimus, skaičiaus standartinę išraišką (171), kubo paviršiaus ploto formulę (173), lygiagretainio (174) bei lygiašonio trikampio (175) savybes, pagrindinę proporcijos savybę (177), skaičiaus dalies ir procentų (178, 179) bei didžiausio bendro daliklio ir mažiausio bendro kartotinio (180) radimą, stulpelinės diagramos braižymą (182). 12–18

164. a) 6; b) 30; c) 50; d) 99; e) 96; f) 1,3; g) 6; h) 13,5; i) 1;
j) $\frac{3}{5}$; k) $\frac{11}{14}$; l) $\frac{27}{29}$; m) $1\frac{2}{3}$; n) $2\frac{1}{4}$; o) $1\frac{3}{5}$.

165. a) 9; b) 14; c) 15; d) 8; e) 30; f) $\frac{1}{2}$; g) 20; h) 2,1; i) 33.

166. a) 3; b) $\frac{1}{5}$; c) 2; d) $\frac{1}{10}$; e) 5; f) $\frac{3}{10}$.

167. a) $\sqrt{250\cdot 490}=\sqrt{25\cdot 10\cdot 49\cdot 10}=\sqrt{25\cdot 49\cdot 10^2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{49}\cdot\sqrt{10^2}=$
$=5\cdot 7\cdot 10=350;$
b) 48; c) 24; d) 60; e) 6; f) 5,5.

168. a) 560; b) 0,35;
c) $\sqrt{0{,}49\cdot 87+0{,}49\cdot 82}=\sqrt{0{,}49(87+82)}=\sqrt{0{,}49\cdot 169}=\sqrt{0{,}49}\cdot\sqrt{169}=$
$=0{,}7\cdot 13=9{,}1;$
d) $\sqrt{144\cdot 1{,}21-0{,}4\cdot 144}=\sqrt{144(1{,}21-0{,}4)}=\sqrt{144\cdot 0{,}81}=$
$=\sqrt{144}\cdot\sqrt{0{,}81}=12\cdot 0{,}9=10{,}8;$

e) $\sqrt{8\cdot 162}+\sqrt{486\cdot 96}=\sqrt{4\cdot 2\cdot 81\cdot 2}+\sqrt{81\cdot 6\cdot 6\cdot 16}=$
$=\sqrt{4\cdot 2^2\cdot 81}+\sqrt{81\cdot 6^2\cdot 16}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{81}+\sqrt{81}\cdot\sqrt{6^2}\cdot\sqrt{16}=$
$=2\cdot 2\cdot 9+9\cdot 6\cdot 4=9\cdot 4(1+6)=252;$

f) $\sqrt{363\cdot 507}-\sqrt{750\cdot 270}=\sqrt{121\cdot 3\cdot 169\cdot 3}-\sqrt{25\cdot 30\cdot 9\cdot 30}=$
$=\sqrt{121\cdot 3^2\cdot 169}-\sqrt{25\cdot 30^2\cdot 9}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{169}-\sqrt{25}\cdot\sqrt{30^2}\cdot\sqrt{9}=$
$=11\cdot 3\cdot 13-5\cdot 30\cdot 3=3(11\cdot 13-5\cdot 30)=-21.$

Sprendžiant e) ir f) punktus reikėtų atkreipti dėmesį į tai, kad kiekvieno dėmens šaknies reikšmė skaičiuojama atskirai ir po to gautos reikšmės sudedamos.

169. a) $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5;$
b) 10; c) 13; d) 15; e) 24; f) 12.

Punkto a) pavyzdžiu galima dar kartą priminti, kad $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

170. a) 4; b) 27; c) 5; d) $\frac{1}{6}$; e) $\frac{1}{144}$; f) 100 000 000 000;
g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{1}{81}$; i) 8.

171. **C**.

172. Galima spręsti taip:
a) Kai $a=2$, $b=-3$, tai $a^2-b^2=2^2-(-3)^2=4-9=-5$;
$5ab^3=5\cdot 2\cdot(-3)^3=10\cdot(-27)=-270$.
Kadangi $-5>-270$, tai $a^2-b^2>5ab^3$.
b) $a^2-b^2<5ab^3$, nes $-1<0$.

173. Prisiminę, kad kubo paviršių sudaro šeši lygūs kvadratai, gauname: $6a^2=150$, $a^2=25$, $a=5\,(\text{cm})$.

174. a) **E**; b) **A**; c) **B**.

175. Kadangi $\angle 1=\angle 2$, tai $\triangle AOC$ — lygiašonis. Vadinasi, $AO=OC$. Kadangi $\angle 3=\angle 4$, $AO=OC$, tai $\triangle AOB=\triangle COB$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Tada $AB=BC$ ir $\triangle ABC$ — lygiašonis. Vadinasi, $\angle BAC=\angle BCA$.

176. a) Pastebėję, kad $9+6=15$, spėjame, kad lentelė sudaryta sudedant atitinkamus skaičius, todėl $\boxed{?}=6+3=9$ ir $9+15=24$.
b) Pastebime, kad $13+21=34$. Vėl spėjame, kad lentelė sudaryta sudedant atitinkamus skaičius, todėl $12+\boxed{?}=13$ ir $\boxed{?}+20=21$. Vadinasi, $\boxed{?}=1$.

177. *Nurodymas*. Pakartokite pagrindinę proporcijos savybę: proporcijos kraštinių narių sandauga lygi jos vidurinių narių sandaugai.
a) $\frac{1}{16}$; b) 1,2;
c) $x^2=1$, $x=\pm 1$ (randame skaičių, kurį pakėlę kvadratu gauname 1).

178. Žinodami, kad į vaikų darželį išvežta 147 litrai pieno ir tai sudaro 14% viso primelžto pieno, gauname, kad iš viso pieno primelžta $\frac{147\cdot 100}{14}=1050\,(\ell)$. Į mokyklą išvežta $\frac{2}{21}$ viso primelžto pieno, t. y. $1050\cdot\frac{2}{21}=100\,(\ell)$.

Šį uždavinį galima spręsti ir sudarius reiškinį: $\frac{147\cdot 100\cdot 2}{14\cdot 21}=100\,(\ell)$.

179. a) Tarkime, kad meistras per valandą pagamina y detalių, tada mokinys pagamina $(17-y)$ detalių. Sudarome lygtį: $4y+2\cdot(17-y)=54$, $y=10$. Vadinasi, meistras pagamina 10, o mokinys $17-10=7$ (detales).
b) 40 detalių.
c) Mokinys iš viso pagamino 14 detalių. Meistro pagamintos detalės atitinka 100%, o mokinio — $p\%$. Mokinio pagamintos detalės sudaro 35% meistro pagamintų detalių.
d) Visos pagamintos detalės atitinka 100%, o meistro — $m\%$. Meistro pagamintos detalės sudaro $74\frac{2}{27}\%$ visų pagamintų detalių.

$\begin{matrix}40 — 100\% \\ 14 — p\%\end{matrix}\longrightarrow p=35\%.$

$\begin{matrix}54 — 100\% \\ 40 — m\%\end{matrix}\longrightarrow m=74\frac{2}{27}\%.$

180. Ieškodami DBD(36; 256) ir MBK(36; 256) išskaidome šiuos skaičius pirminiais dauginamaisiais:
$36=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3=2^2\cdot 3^2$; $256=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^8$.
DBD(36; 256) $=2^2=4$; MBK(36; 256) $=2^8\cdot 3^2=2304$.

181. **D**.

182. b) Iš viso buvo $85+70+30+12=197$ (mokiniai).
c) Raudoną spalvą rinkosi $\frac{85}{197}\cdot 100\%\approx 43\%$, žalią — $\frac{70}{197}\cdot 100\%\approx 36\%$, rudą — $\frac{30}{197}\cdot 100\%\approx 15\%$, o mėlyną — $\frac{12}{197}\cdot 100\%\approx 6\%$ mokinių.
d) Raudoną spalvą atitiks centrinis kampas, lygus $\frac{360\cdot 43}{100}\approx 155°$, žalią $\approx 130°$, rudą $\approx 54°$, mėlyną $\approx 22°$.

Spręsdami c) ir d) punktus skaičiuojame apytiksliai.

2.3. Kvadratinė šaknis iš a^2

Šio skyrelio medžiaga mokiniams yra visiškai nauja. Skyrelyje supažindinama su tapatybe $\sqrt{a^2} = |a|$ ir mokoma ją taikyti pertvarkant reiškinius su kvadratinėmis šaknimis. Vadovėlyje nenagrinėjama tapatybė $\sqrt{a^{2k}} = |a|^k$, $k \in N$, todėl svarbu suprasti, kad norint taikyti tapatybę $\sqrt{a^2} = |a|$ pirmiausia reikia pošaknį išreikšti kvadratu. Atkreipkite dėmesį, kad mokiniai nesutapatintų reiškinių $(\sqrt{a})^2$ ir $\sqrt{a^2}$ bei mokėtų užrašyti reiškinį $-\sqrt{a^2} = -|a|$. Šio skyrelio pagrindinis tikslas — išmokyti taikyti tapatybę $\sqrt{a^2} = |a|$ pertvarkant reiškinius su kvadratinėmis šaknimis.

Pakartoti:

kvadratinės šaknies iš sandaugos ir trupmenos savybes;

tapatybę $(\sqrt{a})^2 = a$, kai $a \geqslant 0$.

Išmokti taikyti tapatybę $\sqrt{a^2} = |a|$ pertvarkant reiškinius.

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiu parodoma, kaip traukiama šaknis iš skaičiaus kvadrato, ir užrašoma apibendrinta lygybė
$$\sqrt{a^2} = |a|$$
bei įsitikinama jos teisingumu.
2. Ši taisyklė parašoma atskirai neneigiamiesiems ir neigiamiesiems skaičiams a:
   - kai $a \geqslant 0$, tai $\sqrt{a^2} = a$;
   - kai $a < 0$, tai $\sqrt{a^2} = -a$.

   Pastaba. Svarbu mokėti šią taisyklę pasakyti žodžiais: „Kvadratinė šaknis iš reiškinio, pakelto antruoju laipsniu, lygi tam reiškiniui, kai jis yra neneigiamas, ir priešingam reiškiniui, kai jis yra neigiamas“.
3. Pavyzdžiais parodoma, kaip taikyti šią taisyklę traukiant šaknį iš laipsnio, kurio rodiklis yra lyginis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 183–188 uždaviniai. Likusieji uždaviniai skirti kartojimui. Siūloma pakartoti skaičiaus užrašymą standartine išraiška (189), keturkampių (190) ir kampų prie lygiagrečių tiesių (191) savybes, prabos sąvoką (192), tekstinių (193, 194) bei kombinatorikos (195) uždavinių sprendimą, mastelį (196), veiksmus su laipsniais (197, 198). 19–25

183. a) 0,2; b) 17; c) 8; d) 1; e) 6; f) 5; g) −100; h) −9; i) −15.

184. a) 2; b) 0,5; c) $-\frac{2}{5}$; d) 100; e) −13; f) $6\frac{5}{7}$.

185. *Nurodymas.* Galima spręsti pagal teorinėje dalyje pateiktą pavyzdį. Pavyzdžiui:
l) $\sqrt{8^6 \cdot (-3)^4} = \sqrt{(8^3)^2((-3)^2)^2} = \sqrt{(8^3)^2} \cdot \sqrt{((-3)^2)^2} = |8^3| \cdot |(-3)^2| =$
$= |512| \cdot |9| = 4608$.
Atsakymas. a) 9; b) 16; c) 1000; d) 24; e) 225; f) 112; g) 16; h) 27; i) 32; j) 108; k) 121.

186. a) $\sqrt{5625} = \sqrt{3^2 \cdot 5^4} = 75$; b) $\sqrt{3969} = \sqrt{3^4 \cdot 7^2} = 63$;
c) $\sqrt{28\,561} = \sqrt{13^4} = 169$; d) $\sqrt{58\,564} = \sqrt{2^2 \cdot 11^4} = 242$.

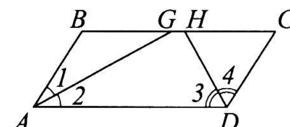
187. a) 8,2; b) 28; c) 6; d) 33,5; e) 19; f) 42; g) $\frac{1}{5}$; h) $-2\frac{2}{5}$.

188. a) $|x|$; b) $3|y|$; c) $-0{,}2|a|$;
d) $\sqrt{m^4} = \sqrt{(m^2)^2} = |m^2| = m^2$; kadangi m^2 visada neneigiamas, tai $|m^2| = m^2$, todėl atsakyme modulio ženklo nerašome;
e) $\frac{1}{3}|x^3y^3|$; f) $0{,}1a^4|b|^5$; g) $-c^6$; h) $\frac{5|x|}{y^2}$; i) $|c|^3$.

189. a) $2{,}8 \cdot 10^{-8}$ cm; b) $6 \cdot 10^{-8}$ cm.

190. *Nurodymas.* Patartina nusibraižyti punktų b), c), d) ir e) brėžinius.
a) **A**; **C**;
b) **A** (tinka ir atsakymas **C** — tik šiuo atveju rombas yra ir kvadratas; tinka ir atsakymas **B** — tik šiuo atveju stačiakampis yra ir rombas, ir kvadratas);
c) **D**; d) **C**; e) **A**.

191. Pirmiausia įsitikiname, kad $\triangle ABG$ yra lygiašonis. Kadangi $\angle 2 = \angle AGB$ (kampai prie lygiagrečių tiesių AD ir BC ir kirstinės AG) ir $\angle 1 = \angle 2$, tai $\angle 1 = \angle AGB$. Todėl $AB = BG = 3$ dm. Analogiškai įsitikiname, kad $\triangle CDH$ taip pat lygiašonis ir $CD = CH = 3$ dm.
Taigi $GH = BC - (BG + HC) = 8 - (3 + 3) = 2$ (dm).
Atsakymas. $GH = 2$ dm.



192. Žiede gryno aukso yra $\frac{5\cdot 840}{1000} = 4,2\,(\mathrm{g})$.

193. a) Uždavinį galima spręsti sudarant lygtį. Tarkime, kad ūkininkas planavo per dieną suarti a ha, o suarė $(a+5)$ ha. Sudarome lygtį: $14a = 12(a+5)$, $a = 30$ ha.

b) $a + 5 = 30 + 5 = 35\,(\mathrm{ha})$.

c) Suarto lauko plotas yra $14a$ (arba $12(a+5)$), tai $14 \cdot 30 = 420\,(\mathrm{ha})$ (arba $12 \cdot 35 = 420\,(\mathrm{ha})$).

194. Iš 34 kg sėmenų galima išspausti $\frac{34\cdot 2,7}{6} = 15,3\,(\mathrm{kg})$ aliejaus.

195. a) 12; 13; 21; 23; 31; 32; b) 123; 132; 213; 231; 312; 321.

196. a) 3 langai ir dvejos durys;

b) garažo ilgis lygus $5,2 \cdot 200 = 10,4\,(\mathrm{m})$;

c) garažo plotis lygus $2,4 \cdot 200 = 4,8\,(\mathrm{m})$;

d) grindų plotas lygus $49,92\,\mathrm{m}^2$;

e) $15\,\mathrm{cm} = 0,15\,\mathrm{m}$; $0,15 \cdot 49,92 = 7,488\,(\mathrm{m}^3)$.

197. XIX amžiaus metai prasideda skaitmenimis 18. Iš lentelės tinka skaičius 1849, kuris yra skaičiaus 43 kvadratas. Taigi $x = 43$. Vadinasi, 1849 metais matematikui buvo 43 metai, o jis gimė $1849 - 43 = 1806$ metais. Galima apsieiti ir be kvadratų lentelės. Kadangi $45^2 = 2025$, tai tikriname $44^2 = 1936$, $43^2 = 1849$, $42^2 = 1764$. Jeigu $x = 44$, tai matematikas gimė $1936 - 44 = 1892$ metais ir vargu ar spėjo tapti XIX a. matematiku. Jeigu $x = 42$, tai jis būtų gimęs $1764 - 42 = 1722$ metais, ir vargu ar galima būtų jį vadinti XIX a. matematiku, net jeigu jis būtų išgyvenęs 100 metų. Taigi renkamės $x = 43$.

Galima pasinaudoti kvadratų lentele, esančia vadovėlio 175 p.

198. Atsakyti į uždavinio klausimus nėra paprasta. Ne kiekvienas matematikos mokytojas galės mokiniams paaiškinti, kas yra mòlis. Apie molio sąvoką galima pasiskaityti vadovėlyje „Tikslieji mokslai humanitarams, I dalis“.

a) Norint atsakyti į klausimą reikia sužinoti, kiek vienoje stiklinėje vandens yra molių. Į šį klausimą atsakysime tuomet, kai žinosime, kiek sveria 1 molis vandens. Anksčiau minėtame vadovėlyje galima rasti, kad 1 molis vandens (H_2O) sveria 18,02 g. Tuomet stiklinėje vandens (sakykime, kad 1 stiklinė = 250 g) bus $\frac{250}{18,02} \approx 14$ molių. Išskirsčius šiuos 14 molių medžiagos tolygiai visuose penkiuose Žemės vandenynuose kiekvienoje vandenyno vandens stiklinėje būtų ne mažiau kaip 500 „žymėtųjų“ molekulių. Kad aptiktume ne mažiau kaip 1000 tos medžiagos molekulių, reikėtų tolygiai išskirstyti ne mažiau kaip $\frac{14\cdot 1000}{500} = 28$ molius medžiagos. Kad aptiktume ne mažiau kaip 100 tos medžiagos molekulių, reikėtų tolygiai išskirstyti ne mažiau kaip $\frac{14\cdot 100}{500} = 2,8$ molio medžiagos.

b) $\frac{10^{100}}{10^{88}} = 10^{12}$.

Atsakymas. a) 28 molius; 2,8 molio; b) gugolą elementariųjų dalelių turėtų 10^{12} Visatų, panašaus dydžio kaip mūsų Visata.

2.4. Reiškinių su kvadratinėmis šaknimis pertvarkymas

Skyrelyje nagrinėjami du reiškinių su kvadratinėmis šaknimis pertvarkymai — dauginamojo iškėlimas prieš šaknies ženklą ir dauginamojo įkėlimas po šaknies ženklu. Šie pertvarkymai remiasi kvadratinės šaknies iš sandaugos ir trupmenos savybėmis bei savybe $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$, kai $a \geqslant 0$ ir $b \geqslant 0$.

Pagrindinis tikslas — išmokyti iškelti dauginamąjį prieš šaknies ženklą ir įkelti dauginamąjį po šaknies ženklu bei išmokyti sudėti, atimti, dauginti, dalyti skaitinius reiškinius, kuriuose yra kvadratinės šaknys.

Pakartoti kvadratinės šaknies iš sandaugos ir trupmenos savybes.

Išmokti:

iškelti dauginamąjį prieš šaknies ženklą;

įkelti dauginamąjį po šaknies ženklu;

atlikti aritmetinius veiksmus su kvadratinėmis šaknimis.

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiais paaiškinamas dauginamojo iškėlimas prieš šaknies ženklą ir dauginamojo įkėlimas po šaknies ženklu.
2. Dauginamojo įkėlimas po šaknies ženklu nusakomas lygybe: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$.

   Pastabos. 1. Formulę galima taikyti ir kai $a < 0$. Šiuo atveju minusą reikia palikti prieš šaknies ženklą, t. y. $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$ $(a < 0, b \geqslant 0)$.

   2. Stipresnių mokinių paprašykite formulę parašyti atbulai, t. y. $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$.
3. Pateikta lentelė, atspindinti analogiją tarp raidinių reiškinių ir skaitinių reiškinių su kvadratinėmis šaknimis pertvarkymų.

   Pastaba. Paprašykite mokinių sugalvoti daugiau analogiškų pavyzdžių.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 199–206 uždaviniai: 199–202 ir 206 — dauginamojo iškėlimas prieš šaknies ženklą, 203–205 — dauginamojo įkėlimas po šaknies ženklu. Kartojimui parinkti uždaviniai: skaitinio reiškinio reikšmės radimas (207, 209), reiškinių prastinimas (208), darbo užmokesčio apskaičiavimas (210), tekstiniai (212, 214), geometriniai (211, 213) uždaviniai, dėsningumų ieškojimas (215, 216). 26–31

199. a) $2\sqrt{3}$; b) $2\sqrt{5}$; c) $4\sqrt{5}$; d) $3\sqrt{5}$; e) $-5\sqrt{5}$; f) $7\sqrt{7}$; g) $6\sqrt{5}$;
h) h) $12\sqrt{3}$; i) $6\sqrt{2}$; j) $15\sqrt{2}$; k) $12\sqrt{6}$; l) $-20\sqrt{3}$; m) $\sqrt{2}$;
n) $-\sqrt{3}$; o) $-3\sqrt{3}$; p) $2{,}5\sqrt{2}$.

200. *Nurodymas.* Prieš sprendžiant uždavinį reikia prieš šaknies ženklą iškelti dauginamąjį.
a) $\sqrt{27} = \sqrt{9\cdot 3} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$;
$3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$; $3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3(\sqrt{3})^2 = 3\cdot 3 = 9$;
$3\sqrt{3} : \sqrt{3} = 3$; $(3\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9\cdot 3 + 3 = 30$; $(3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 =$
$= 9\cdot 3 - 3 = 24$;
b) $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;
$2\sqrt{2} + \sqrt{3}$; $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$; $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{2\cdot 3} = 2\sqrt{6}$; $2\sqrt{2} : \sqrt{3} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$;
$(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = 4\cdot 2 + 3 = 11$; $(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 = 4\cdot 2 - 3 = 5$.

Gražesni rezultatai būtų b) punkte vietoj $\sqrt{3}$ imant $\sqrt{2}$.

201. a) $\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = 3\sqrt{5}$; kadangi $2\sqrt{5} < 3\sqrt{5}$, tai $2\sqrt{5} < \sqrt{45}$;
b) $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\sqrt{2}$; kadangi $3\sqrt{2} > 2\sqrt{2}$, tai $3\sqrt{2} > \sqrt{8}$;
c) $\sqrt{63} = \sqrt{9\cdot 7} = 3\sqrt{7}$; kadangi $4\sqrt{7} > 3\sqrt{7}$, tai $4\sqrt{7} > \sqrt{63}$;
d) $\sqrt{72} = \sqrt{36\cdot 2} = 6\sqrt{2}$; kadangi $11\sqrt{2} > 6\sqrt{2}$, tai $11\sqrt{2} > \sqrt{72}$.

202. a) $18\sqrt{3}$; b) $-6\sqrt{2}$; c) $3\sqrt{3}$; d) $19\sqrt{5} - 20\sqrt{3}$; e) $\sqrt{3}$; f) $4\sqrt{3}$.

203. a) $\sqrt{75}$; b) $\sqrt{112}$; c) $\sqrt{810}$; d) $\sqrt{60}$; e) $\sqrt{10}$; f) $\sqrt{2}$; g) $\sqrt{8}$;
h) $\sqrt{3}$.

204. *Nurodymas.* Įkelkite skaičių po šaknies ženklu ir tada palyginkite reiškinius.
a) $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$; $4\sqrt{2} = \sqrt{32}$; $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$; $\sqrt{28}$.
Kadangi $\sqrt{24} < \sqrt{27} < \sqrt{28} < \sqrt{32}$, tai skaičiai, išdėstyti didėjimo tvarka, yra: $2\sqrt{6}$; $3\sqrt{3}$; $\sqrt{28}$; $4\sqrt{2}$;
b) $5\sqrt{2}$; $\sqrt{56}$; $2\sqrt{15}$; $3\sqrt{7}$; c) $\frac{1}{5}\sqrt{125}$; $6\sqrt{0{,}2}$; $\sqrt{39}$;
d) $11\sqrt{0{,}5}$; $\frac{3}{4}\sqrt{160}$; $\sqrt{91}$.

205. a) $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2\cdot 3} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{12}$; $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2\cdot 2} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{18}$;
kadangi $\sqrt{12} < \sqrt{18}$, tai $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$. Nelygybė teisinga.
Atsakymas. Teisingos yra a) ir d) punktų nelygybės.

206. a) Kai $a = \sqrt{12}$, $b = \sqrt{3}$, tai $a\cdot b = \sqrt{12}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{12\cdot 3} = \sqrt{36} = 6$;
b) kai $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{45}$, tai $a\cdot b = \sqrt{5}\cdot\sqrt{45} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5} =$
$= 3\cdot 5 = 15$.

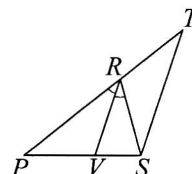
207. a) $34{,}4-(18{,}1-5{,}6)+(-11{,}9+8)=34{,}4-18{,}1+5{,}6-11{,}9+8=$
$=(34{,}4+5{,}6+8)-(18{,}1+11{,}9)=48-30=18;$
b) $-2{,}86\cdot\frac{6}{7}-\frac{6}{7}\cdot 0{,}64=\frac{6}{7}(-2{,}86-0{,}64)=-\frac{6}{7}\cdot 3{,}5=-\frac{6\cdot 35}{70}=-\frac{6}{2}=-3.$

208. D.

209. a) $3\frac{4}{9}$; b) $-0{,}05$.

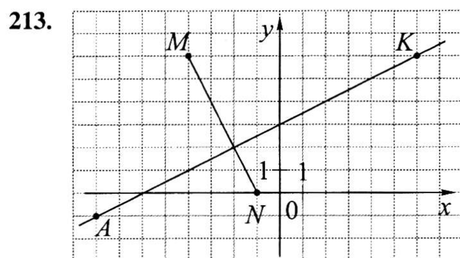
210. *Nurodymas.* Mokiniams reikėtų priminti, kad tarifinis atlyginimas lygus valandinio atlygio ir darbo laiko sandaugai; darbuotojo mokestis *SODRAI* nuo 2000 01 01 sudaro 3% nuo uždirbtų pinigų (šiuo atveju, nuo tarifinio atlyginimo), o pajamų mokestis sudaro 33% skirtumo tarp uždirbtų pinigų ir neapmokestinamojo minimumo.
Atsakymas. a) 6,6 Lt; b) 301,29 Lt; c) 34,65 Lt; d) 819,06 Lt.
Pastaba. Reikėtų atkreipti mokinių dėmesį, kad skyrelio „Pasitikrinkite" 18 uždavinio atsakymas nurodytas skaičiuojant 1% mokestį *SODRAI*. Nuo 2000 01 01 skaičiuojant pagal naująjį 3% *SODROS* tarifą atsakymai būtų tokie: c) 25,74 Lt; d) 628,98 Lt.

211. $RV \parallel TS$, o RS — kirstinė, tai $\angle VRS=\angle RST$ (vidaus priešiniai kampai). $RV \parallel TS$ ir RT — kirstinė, tai $\angle PRV=\angle RTS$ (atitinkamieji kampai). Duota, kad $\angle PRV=\angle VRS$, tai $\angle RST=\angle RTS$. Vadinasi, $\triangle RTS$ yra lygiašonis ir $RT=RS$.



212. Tarkime, kad šio skaičiaus vienetų skaitmuo yra m. Tada dešimčių skaitmuo bus $m+3$. Sudarome lygtį: $m+m+3=13$, $m=5$ (vienetų skaitmuo); $m+3=5+3=8$ (dešimčių skaitmuo).
Atsakymas. Ieškomas skaičius 85.

213.



Braižome atkarpą MN (o ne tiesę MN) ir tiesę (o ne atkarpą) AK (pratęskime į abi puses nuo taškų A ir K).

214. Pirmasis traktorius per dieną suars $\frac{1}{8}$, o antrasis — $\frac{1}{12}$ lauko. Tarkime, kad abu traktoriai dirbdami kartu suars šį lauką per x dienų, tai $\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)x=1$ (visas suartas laukas atitinka vienetą), $x=4\frac{4}{5}$ (dienos).
Galima spręsti ir taip:
pirmasis traktorius per dieną suars $\frac{1}{8}$, antrasis — $\frac{1}{12}$, o abu kartu — $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24}$ lauko. Visą lauką abu traktoriai gali suarti per $1:\frac{5}{24}=4\frac{4}{5}$ (dienos).
Atsakymas. Per $4\frac{4}{5}$ dienos.

215. Su mokiniais reikėtų prisiminti lietuvių kalbos abėcėlę ir tada atkreipti dėmesį, kad skaičiai rašomi vis pridedant 6, nes $3+6=9$, $9+6=15$. Tada sekantis skaičius yra 21, nes $15+6=21$. Atitinkamai išdėstytos ir raidės, t. y. po L šeštoji raidė lietuvių kalbos abėcėlėje yra S. Taigi eilutė bus tokia: 3; D; 9; H; 15; L; 21; S.

216. Galima samprotauti taip. Kadangi $2+8=10$, tai galime spėti, kad kiekvienas skaičius pradedant ketvirtuoju lygus pirmo ir trečio prieš jį einančių skaičių sumai. Tada klaustuko vietoje turėtų būti skaičius 14 ($4+10=14$ ir $8+14=22$).
Galima samprotauti ir kitaip. Kadangi $4=2+2$; $10=8+2$, tai galima spėti, kad skaičiai su lyginiais numeriais gaunami pridėjus 2 prie prieš jį einančio skaičiaus. Tada $22=?+2$, t. y. $?=20$. Tada kiekvieną skaičių su nelyginiu numeriu gautume prieš jį einantį skaičių padauginę iš 2.
Pirmuoju atveju taisyklę galima užrašyti taip: $a_{n+3}=a_n+a_{n+2}$.
Antruoju atveju ji užrašoma taip: $a_{2n}=a_{2n-1}+2$, $a_{2n+1}=2a_{2n}$.

3. REIŠKINIŲ PERTVARKYMAI

Pagrindinėje mokykloje labai svarbu išmokyti mokinius pertvarkyti reiškinius. 7 klasėje buvo mokoma atskliausti, kai prieš skliaustuose esantį reiškinį yra ženklai „+“ ar „−“, kai reiškinys dauginamas iš skaičiaus, iškelti bendrą dauginamąjį prieš skliaustus, sutraukti panašiuosius narius, rasti sandaugos koeficientą.

Šiame skyriuje mokiniai supažindinami su visiškai naujomis sąvokomis: tapačiai lygūs reiškiniai, tapatybė, vienanariai, daugianariai, grupavimas. Taip pat nagrinėjami sudėtingesni reiškinių tapatūs pertvarkymai — tai vienanario daugyba iš daugianario, daugianarių daugyba, formulių $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ ir $(a-b)(a+b)$ taikymas prastinant reiškinius.

Be to, mokoma iškelti prieš skliaustus bendrą dauginamąjį, kai jis yra ne tik skaitinis ar raidinis dauginamasis, bet ir reiškinys. Visiškai nauja tema yra daugianarių skaidymas dauginamaisiais grupavimo būdu bei taikant greitosios daugybos formules.

Vienas iš pagrindinių uždavinių — išmokyti sudauginti daugianarius, taikyti formules $(a\pm b)^2$ ir $(a-b)(a+b)$, skaidyti daugianarius dauginamaisiais.

2–4 skyreliuose mokoma sudauginti daugianarius, o 5–7 atvirkščiai, t. y. daugianarį išskaidyti dauginamaisiais.

3.1. Tapatūs reiškinių pertvarkymai. Tapatybė

Sprendžiant uždavinius dažnai tenka sudaryti, pertvarkyti, prastinti įvairius reiškinius. Kai kurių tapačiųjų pertvarkymų buvo mokoma žemesnėse klasėse. Šiame skyrelyje įvedamos sąvokos: *tapačiai lygūs reiškiniai* ir *tapatybė*. Vieno reiškinio keitimas kitu, tapačiai jam lygiu, vadinamas tapačiuoju reiškinio pertvarkymu.

Pakartoti:

daugybos skirstymo dėsnį;
atskliautimo taisykles;
bendro dauginamojo iškėlimą už skliaustų;
panašiųjų narių sutraukimą.

Išmokti:

nustatyti, ar reiškiniai yra tapačiai lygūs;
nustatyti, ar lygybė yra tapatybė.

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiais paaiškinama, kokie reiškiniai yra tapačiai lygūs, ir pateikiamas tapačiai lygių reiškinių apibrėžimas:

> *Reiškiniai, kurių reikšmės yra lygios su visomis galimomis kintamųjų reikšmėmis, vadinami tapačiai lygiais.*

   Tapačiai lygių reiškinių lygybė pavadinama tapatybe.

2. Atlikdami 1 užduotį mokiniai kartu pakartos ir skaičių veiksmų savybes.

   Pastaba. Būtinai prisiminkite daugybos skirstymo savybę: $a(b+c)=ab+ac$.

3. Atlikdami 2 užduotį mokiniai turi paaiškinti, *kodėl* duoti reiškiniai nėra tapačiai lygūs: nes jų reikšmės *ne su visomis* kintamųjų reikšmėmis yra lygios.

4. Paaiškinama, kad tapatybėmis laikomos ir teisingos skaitinių reiškinių lygybės.

5. Pavyzdžiais primenami jau žinomi tapatūs pertvarkymai: atskliautimas, kai reiškinys dauginamas iš skaičiaus, panašiųjų narių sutraukimas, bendro dauginamojo iškėlimas už skliaustų, lygčių sprendimas. Taip pat pateiktas pavyzdys, kaip įsitikinti, kad lygybė yra tapatybė.

   Pastaba. Spręsdami lygtį ją tapačiai pertvarkome taip, kad sprendinių aibė nepasikeistų, t. y. lygtį keičiame jai ekvivalenčia lygtimi. Lygtys vadinamos ekvivalenčiomis, jeigu jų sprendiniai yra tie patys arba jos sprendinių neturi. Apie lygčių ekvivalentumą bus kalbama 9 klasėje, bet tai nebus privaloma medžiaga. Spręsdami lygtis mokiniai turi suvokti, kad prie abiejų lygties pusių galima pridėti arba atimti tą patį skaičių ar reiškinį (perkelti narius į kitą lygties pusę pakeičiant jų ženklus priešingais) ir abi lygties puses galima dauginti arba dalyti iš to paties, nelygaus nuliui, skaičiaus.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

217–232 uždaviniai yra teminiai. Be to, 217 ir 218 pratimai kartu yra ir kartojimo, nes reikia prisiminti įvairias veiksmų savybes. Likusi uždavinių dalis skirta kartojimui: lygiagretainio ploto (233), kampų prie lygiagrečių tiesių ir kirstinės (234), procentų (235) bei kombinatorikos (236) uždaviniai.

1–16

217. a) Sudėties perstatymo; b) sudėties jungimo; c) vienas kitam priešingųjų skaičių sumos; d) daugybos iš nulio; e) daugybos skirstymo; f) skaičiaus ir jam priešingojo skaičiaus kėlimo kvadratu.
Pastaba. Nėra labai svarbu, kad mokiniai pasakytų minėtų savybių pavadinimus. Mokiniai gali ir savais žodžiais paaiškinti savybių esmę, pavyzdžiui: a) sukeitus dėmenis vietomis suma nepasikeičia; d) daugindami iš nulio gauname nulį.

Spręskite mintinai.

218. a) $a + (-a) = 0$; b) $a \cdot 1 = a$; c) $|a| = |-a|$; d) $a^2 = (-a)^2$.

219. Pratimas skirtas mokinių savarankiškam darbui. Pavyzdžiui:
a) $2 + 3 = 5$; b) $3x + 3x = 6x$; c) $x + y = y + x$.

220. Tapačiai lygūs yra reiškiniai e), f), g), h).

221. Tapatybės yra a), b), e) ir h) punktų lygybės.

Mokiniai turėtų paaiškinti, *kodėl* reiškiniai yra arba nėra tapačiai lygūs.

222. a) $x - 2y + 4$; b) $-10x - 15y + 25z$; c) $1{,}24 - 0{,}48b - 0{,}7c$;
d) $-21x^2 + 6x - 3$.

223. a) 16; b) 70; c) 59; d) 21;
e) $999 \cdot 15 = (1000 - 1) \cdot 15 = 15\,000 - 15 = 14\,985$;
f) $0{,}98 \cdot 0{,}6 = (1 - 0{,}02) \cdot 0{,}6 = 0{,}6 - 0{,}012 = 0{,}588$.

Sprendžiant a)–d) punktus patogu prieš skliaustus iškelti bendrą dauginamąjį.

224. a) $29a$; b) $13x - 44$; c) $-0{,}4a + 6b + 16$; d) $13{,}2x - 7{,}4y - 2{,}4$;
e) $\frac{19}{35}a + \frac{3}{35}b$; f) $6{,}2a + 7{,}4b - 13{,}6$.

225. a) $5{,}2(a + b)$; b) $6(3a + 1)$; c) $11(1 + 2x - 3a)$; d) $5(4a - 1 + 5x)$.

226. a) $-x + 5y$; b) $10a$; c) $-5x + 57y$; d) $2a - 4b + 3x - 3y$.

227. a) a^2; 81; b) a^0; 1; c) a^5; $(-95)^5 = -7\,737\,809\,375$; d) a^{-1}; $\frac{1}{3}$.

228. *Nurodymas.* Spręsti galima pagal teorinėje dalyje pateiktą 3 pavyzdį, t. y.: pertvarkę kairę ir dešinę lygybės puses įsitikiname, kad abi lygybės pusės yra lygios su visomis kintamųjų reikšmėmis.
Suprastinus kairę ir dešinę lygybės puses gaunami šie reiškiniai:
a) $5x - 20$; b) $-56 - 14a$; c) $32x - 51$; d) $4 - \frac{1}{2}y$.

229. a) 2; b) -4 ir -5; c) 63,5 ir 60; d) 15 ir 16.

230. a) -197; b) 5; c) 1; d) -5.

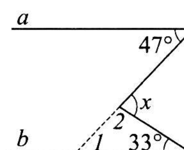
231. Spręsti galima sudarant lygtį:
a) $4(2 - 5x) = 3(5x - 8) + 2$, $x = \frac{6}{7}$;
b) $-2(4x + 1) + 5 = 5(0{,}4x + 3{,}2)$, $x = -1{,}3$;
c) $(7x + 5) \cdot 3 = 15x - 21$, $x = -6$;
d) $11 - 0{,}2x = 4(0{,}05x + 7)$, $x = -42{,}5$.

232. *Nurodymas.* Reikėtų pakartoti dauginamojo iškėlimą prieš šaknies ženklą.
a) 0; b) $2\sqrt{3}$.

233. a) $S = 4 \cdot 2 = 8\,(\text{cm}^2)$;
b) $S = 10 \cdot 4$ ir $S = x \cdot 3$. Sudarome lygtį: $10 \cdot 4 = x \cdot 3$, $x = 13\frac{1}{3}$.

234. a) $a \parallel b$, tai $\angle 1 = 47°$ (vidaus priešiniai kampai).
$\angle x = \angle 1 + 33° = 47° + 33° = 80°$ (trikampio priekampio savybė).
Kampą x galima rasti ir taip:
$\angle 2 = 180° - (\angle 1 + 33°) = 180° - (47° + 33°) = 100°$;
$\angle x = 180° - 100° = 80°$;
b) $\angle x = 50° + (180° - 135°) = 95°$.

Kad būtų lengviau spręsti uždavinį, papildykite brėžinį.



235. a) $26 \cdot 0{,}35 = 9{,}1$ (ha); b) $(26 - 9{,}1) \cdot 0{,}2 = 3{,}38$ (ha).

236. *Nurodymas.* Galima mokiniams pasiūlyti pažymėti sukneles ir batukus skaičiais ar raidėmis ir juos suporuoti.
Atsakymas. Saulė gali apsirengti 8 skirtingais būdais.

3.2. Vienanariai ir daugianariai. Jų daugyba

Skyrelio teorinė medžiaga yra gana plati. Kaip ir su reiškinių pertvarkymais, taip ir su vienanariais bei daugianariais mokiniai susidūrė jau anksčiau, tik šie terminai vadovėlyje nebuvo vartojami. Šiame skyrelyje „įteisinamos“ sąvokos — *vienãnaris* ir *daugiãnaris*. Svarbu, kad mokiniai išmoktų dauginti vienanarį iš daugianario bei daugianarį iš daugianario.
Mokant vienanarių ir daugianarių daugybos patartume vengti gremėzdiškų reiškinių.

Pakartoti:
daugybos skirstymo dėsnį;
sandaugos ženklo nustatymą;
skaičiaus dauginimą iš reiškinio;
veiksmų su laipsniais savybes.

Išmokti:
vienanarį užrašyti standartine išraiška;
dauginti vienanarį iš daugianario;
dauginti daugianarį iš daugianario.

Šiame skyrelyje:

1. Vienanario sąvoka paaiškinama pavyzdžiais ir pateikiamas vienanario apibrėžimas:

Skaičių, kintamųjų ir jų laipsnių sandaugos vadinamos vienanariais.

Pastaba. Nebūtina, kad mokiniai mokėtų šį apibrėžimą.

2. Taip pat pavyzdžiu paaiškinama ir vienanario standartinė išraiška. Apibrėžiamas vienanario koeficientas (7 klasėje jis buvo vadinamas sandaugos koeficientu).
3. Į klausimą, pažymėtą klaustuku, mokiniai turėtų atsakyti savarankiškai. Svarbu atkreipti mokinių dėmesį į vienanarius, kurių koeficientai yra 1 arba -1. Viena būdingesnių klaidų yra ta, kad mokiniai nematydami skaitinio dauginamojo dažnai mano, jog koeficientas yra nulis arba tiesiog minusas.
4. Pavyzdžiu paaiškinama daugianario sąvoka ir pateikiamas jo apibrėžimas:

Daugianariu vadinama vienanarių algebrinė suma.

Pastaba. Šį apibrėžimą mokėti nebūtina. Svarbiau, kad mokiniai suprastų dvinario, trinario sąvokas, t. y. jeigu daugianarį sudaro du nariai, tai jis vadinamas dvìnariu, jei trys — trìnariu ir t. t.

5. Remiantis daugybos skirstymo dėsniu aiškinama, kaip dauginti vienanarį iš daugianario.

Dauginant vienanarį iš daugianario reikia vienanarį padauginti iš daugianario kiekvieno nario ir gautas sandaugas su atitinkamais ženklais sudėti.

Kad mokiniai geriau suvoktų vienanario daugybą iš daugianario, tai pavaizduojama simboliais ir pailiustruojama pavyzdžiu.

6. Remiantis pavyzdžiu ir pritaikius vienanario dauginimo iš daugianario taisyklę apibrėžiama dviejų daugianarių sandauga:

Dauginant daugianarį iš daugianario reikia kiekvieną daugianario narį dauginti iš kito daugianario kiekvieno nario ir gautas sandaugas su atitinkamais ženklais sudėti.

7. Pavyzdžiu aiškinama daugianarių daugyba ir nurodoma, kad sudauginę daugianarius panašiuosius narius sutraukiame.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

237–248 uždaviniai yra teminiai. Suprastinus 237 pratimo reiškinį vienanarių koeficientus galima pasakyti žodžiu. 239 — spręsti žodžiu. Likę uždaviniai skirti kartojimui: lygčių, kai kelių reiškinių sandauga lygi nuliui, sprendimas (249), lygiašonio trikampio savybės taikymas (250), prabos (252), laipsnio su sveikuoju neigiamuoju rodikliu (253) apskaičiavimas, reiškinio sudarymas (254, 256), rombo savybių taikymas (255).

17–36

237. a) $-12m$; -12; b) p; 1; c) $9x$; 9; d) a^5; 1; e) $2x^3$; 2; f) $-y^6$; -1; g) $6x^3$; 6; h) $-m^3$; -1; i) $1000a^6$; 1000; j) $-16c^2$; -16; k) $-\frac{8}{27}a^3b^9$; $-\frac{8}{27}$; l) $15\frac{5}{8}a^9b^9$; $15\frac{5}{8}$.

238. a) $12a + 4a = 16a$ (g); b) $12a - 4a = 8a$ (g); c) $\frac{12a}{4a} = 3$ (kartai).

239. a) reiškinių ax ir by suma; b) reiškinių ax ir by skirtumas; c) reiškinių ax ir by sandauga; d) reiškinių ax ir by dalmuo; e) reiškinių ax ir by kvadratų suma; f) reiškinių ax ir by sumos kvadratas; g) reiškinių ax ir by kvadratų skirtumas; h) reiškinių ax ir by skirtumo kvadratas; i) skaičiaus 2 ir reiškinio, dviejų ir x skirtumo kvadrato, skirtumas.

Reiškinius galima perskaityti ir paprasčiau, pvz.: a) ax plius by; i) du minus, skliausteliai atsidaro, du minus x, skliausteliai užsidaro, kvadratu.

240. a) $n, n+1, n+2, n+3$; b) $4n+6$; c) 0.
Pastaba. Mokiniai labai gerai suvokia, kaip reikia užrašyti iš eilės einančius skaičius, kai jiems pateikiamas konkretus pavyzdys su skaičiais. Pavyzdžiui: 12, 13, 14, 15 ir 12, 12 + 1, 12 + 2, 12 + 3.

241. a) $n+5, n+6, n+7, n+8$; $4n+26$; 0;
b) $n-6, n-5, n-4, n-3$; $4n-18$; 0.

242. a) $20xy$; b) $-2a^3$; c) $0{,}3x^2+y$; d) $3ab+8$.

243. a) $5b-10$; b) $-ax-5ay$; c) $2p^2-5p^2q$; d) $-3y^4+2xy^3$;
e) $3x^2-2ax^2+4x^3$; f) $-5y^3-2y^2+7y$; g) $-3a^2b$; h) $-3y^5a$; i) $2x^7y$.

244. a) $x^2+7x+12$; b) $4-y^2$; c) $6y^2+19y+7$; d) $2m^2-14m-88$;
e) $x^3+5x^2+2x-12$; f) $a^4-2a^3+a^2+a-1$.

245. a) $39\cdot25=(40-1)\cdot25=40\cdot25-1\cdot25=975$;
b) $79\cdot81=(80-1)(80+1)=80\cdot80+80\cdot1-80\cdot1-1\cdot1=6400-1=6399$;
c) $30{,}1\cdot29{,}9=(30+0{,}1)(30-0{,}1)=900-0{,}01=899{,}99$;
d) $15{,}2\cdot14{,}8=(15+0{,}2)(15-0{,}2)=225-0{,}04=224{,}96$.

Šį pratimą galima atlikti ir mintinai.

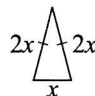
246. a) $(p+m)(m+r)=pm+pr+m^2+mr$. Palyginę gautą reiškinį su dešine lygybės puse pastebime, kad nėra nario m^2;
b) $(a-x)(x+2)=ax+2a-x^2-2x$. Pastebime, kad vietoj nario a^2 turėtų būti $2a$.

247. a) 4; b) 5; c) $2\frac{5}{9}$;
d) pertvarkę duotąją lygtį gauname: $0\cdot y=-10$. Ši lygtis sprendinių neturi, taigi ir duotoji lygtis sprendinių neturi.

248. *Nurodymas.* Reikėtų pakoreguoti sąlygą: „a) 66 vienetais mažesnė už po jų einančių kitų dviejų gretimų skaičių sandaugą; b) ...didesnė už po jų einančių kitų dviejų...".
Sprendžiame sudarydami lygtį:
a) $x(x+1)+66=(x+2)(x+3)$, $x=15$; $15+1=16$;
b) $x(x+1)-18=(x+2)(x+3)$, $x=-6$; $-6+1=-5$.
Atsakymas. a) 15; 16; b) −6; −5.

249. a) 3; b) −6; c) −4; 5; d) −2; $-\frac{2}{3}$; e) 0; $\frac{3}{4}$; 3; f) 0; −4; $1\frac{1}{4}$.

250. Kad būtų lengviau sudaryti lygtį, galima nusibraižyti brėžinį.



a) Kadangi šoninė kraštinė už pagrindą ilgesnė du kartus, tai pažymėkime pagrindą x cm; tuomet šoninė kraštinė bus $2x$ cm. Pagal sąlygą sudarome lygtį: $x+2x+2x=20$, $x=4$; $2x=2\cdot4=8$. Trikampio kraštinių ilgiai yra 4 cm; 8 cm; 8 cm.
b) Pagal sąlygą sudarome lygtį: $x+x+2x=20$, $x=5$; $2\cdot5=10$. Nors sudaryta lygtis ir turi sprendinį, bet toks trikampis neegzistuoja, nes viena kraštinė lygi kitų dviejų kraštinių sumai, t. y. $10=5+5$.

Kad toks trikampis neegzistuoja, galima pastebėti ir nesprendžiant lygties, nes $x+x=2x$.

251. Reikėtų aptarti, kaip kaladėlės talpinamos į dėžę, ir pavaizduoti tai piešiniu.
Atsakymas. Sutalpins.

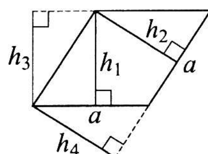
252. a) Grandinėlėje gryno aukso yra $\frac{12\cdot585}{1000}=7{,}02$ (g).
b) Stiklinėje yra išmaišyta $\frac{250\cdot28}{1000}=7$ (g) cukraus.

253. a) $2^{-6}<2^{-4}$, nes $\frac{1}{64}<\frac{1}{16}$; b) $5^{-3}=0{,}2^3$.

Pravartu pastebėti, kad $0{,}2^3=\left(\frac{1}{5}\right)^3=5^{-3}$.

254. a) $24{,}5\cdot0{,}4=9{,}8$ (km);
b) $(24{,}5+2{,}1)\cdot1{,}5=39{,}9$ (km);
c) $24{,}5\cdot0{,}4+(24{,}5+2{,}1)\cdot1{,}5=49{,}7$ (km).

255.



$h_1=h_2=h_3=h_4$, nes $ah_1=ah_2=ah_3=ah_4(=S)$.

256. Pagal sąlygą sudarykime reiškinį. Jį suprastinę gausime 20, t. y.
$(x+7)\cdot2+6-2x=20$.

3.3. Dviejų narių sumos kvadrato ir skirtumo kvadrato formulės

Pagrindinėje mokykloje mokiniai turėtų išmokti greitosios daugybos formules ir sugebėti jas taikyti pertvarkant reiškinius bei sprendžiant lygtis ir nelygybes. Šiuo skyriumi pradedamos nagrinėti žinomiausios algebros formulės. Jos pateikiamos raidine, simbolių ir žodine išraiška. Pagrindinis tikslas — išmokyti dvinarį pakelti kvadratu.

Pakartoti:

daugianario dauginimo iš daugianario taisyklę;
tapatybės sąvoką.

Išmokti:

dviejų narių sumos kvadratą ir dviejų narių skirtumo kvadratą parašyti daugianariu (trinariu);
užrašyti šias formules raidėmis ir mokėti nusakyti žodžiais.

Šiame skyrelyje:

1. Prisiminus, kaip dauginamas dvinaris iš dvinario, įrodoma sumos kvadrato formulė:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ji užrašoma žodžiais:

Dviejų narių sumos kvadratas lygus pirmojo nario kvadratui plius dviguba pirmojo ir antrojo nario sandauga, plius antrojo nario kvadratas.

Kad mokiniai geriau įsimintų šią formulę, ji užrašoma ir simboliais: $(\triangle + \square)^2 = \triangle^2 + 2\triangle\square + \square^2$, bei pateikiamas pavyzdys.

2. Analogiškai įrodoma skirtumo kvadrato formulė:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Ji užrašoma žodžiais:

Dviejų narių skirtumo kvadratas lygus pirmojo nario kvadratui minus dviguba pirmojo ir antrojo nario sandauga, plius antrojo nario kvadratas.

Ir simboliais: $(\triangle - \square)^2 = \triangle^2 - 2\triangle\square + \square^2$, bei pateikiamas pavyzdys.

3. Abi sumos ir skirtumo kvadrato formulės užrašomos kartu: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Pastaba. Piešinėliai padės mokiniams prisiminti daugianarių daugybos taisyklę.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

257–266 uždaviniai yra teminiai. Likusieji uždaviniai skirti kartojimui. Naudinga prisiminti veiksmų su laipsniais savybes (267, 268), trikampio ir stačiakampio plotų skaičiavimą (269, 270), reiškinio reikšmės radimą (271), diagramų skaitymą (272), mastelio taikymą (273), neigiamųjų ir teigiamųjų skaičių kėlimą kvadratu (274).

37–46

257.

Sumos (skirtumo) kvadratas	Pirmo nario kvadratas	Dviguba pirmo ir antro narių sandauga (su atitinkamu ženklu)	Antro nario kvadratas
$(m+n)^2$	m^2	$+2mn$	n^2
$(7+x)^2$	49	$+14x$	x^2
$(a-x)^2$	a^2	$-2ax$	x^2
$(5-3x)^2$	25	$-30x$	$9x^2$

258. a) m^2 ir 4^2; $2x \cdot y$; $2 \cdot 5a \cdot 3b$; b) b^2; 7^2 ir p^2; $2 \cdot 3x \cdot 2y$.

259. a) $m^2 - 16m + 64$; b) $4x^2 + 12x + 9$; c) $16x^2 - 24x + 9$;
d) $25a^2 + 2ab + \frac{1}{25}b^2$; e) $\frac{1}{9}a^2 - 2ab + 9b^2$; f) $0{,}09x^4 - 0{,}12x^2y + 0{,}04y^2$.

260. Turėtų būti:
a) $4a^2 + \underline{2}ax + \frac{1}{4}x^2$; b) $p^{10} \underline{- \frac{1}{2}}p^8 + \frac{1}{16}p^6$;
c) $\underline{144}x^4 - 24x^5 + x^6$; d) $\frac{1}{36}a^4 - a^2b \underline{+ 9}b^2$.

261. a) 324; b) 289;
c) $71^2 = (70+1)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041$;
d) $199^2 = (200-1)^2 = 39\,601$; e) $9{,}9^2 = (10 - 0{,}1)^2 = 98{,}01$.

262. a) 50; b) 5; c) 48; d) $30 - 10\sqrt{5}$.

263. Tapatybės yra a) ir d) punktų lygybės.

264. a) $x^2 + 2xy + y^2$; b) $16 + 8a + a^2$; c) $p^2 + 18p + 81$; d) $m^2 + 14m + 49$. Galima pasinaudoti 263d uždavinyje įrodyta tapatybe.

265. a) -6; b) $-24{,}5$; c) -6; d) $-11\frac{1}{11}$.

266. *Nurodymas.* Norint įsitikinti, kad lygybė yra tapatybė, reikėtų pertvarkyti kairę lygybės pusę ir įsitikinti, kad ji lygi dešinei pusei:

a) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) =$
$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$;

b) $(a+b)^2+(a-b)^2 = a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2 = 2a^2+2b^2 = 2(a^2+b^2)$.

Šias tapatybes galima iliustruoti ir geometriškai:

a) užbrūkšniuotos figūros plotas lygus kvadrato, kurio kraštinė $a+b$, ir kvadrato, kurio kraštinė $a-b$, plotų skirtumui, t. y. $(a+b)^2 - (a-b)^2$; arba užbrūkšniuotos figūros plotas lygus keturių lygių stačiakampių, kurių kraštinės yra a ir b, plotų sumai, t. y. $4ab$;

b) užbrūkšniuotos figūros plotas lygus kvadrato, kurio kraštinė $a+b$, ir kvadrato, kurio kraštinė $a-b$, plotų sumai, t. y. $(a+b)^2 + (a-b)^2$; arba užbrūkšniuotos figūros plotas lygus dviejų lygių kvadratų, kurių kraštinės yra a, ir dviejų lygių kvadratų, kurių kraštinės yra b, plotų sumai, t. y. $2a^2 + 2b^2 = 2(a^2+b^2)$.

Du kartus užbrūkšniuoto kvadratėlio (esančio kvadrato viduryje) plotas imamas du kartus.

267. a) 128; b) 2; c) 8000; d) 9; e) 3; f) $\frac{1}{4}$.

268. a) $\frac{1}{2} \cdot 2^6 = 2^5 = 32$; b) $\frac{1}{3} \cdot 3^3 = 3^2 = 9$.

269. a) 4 cm; b) 5 dm.

270. a) 1) Grindims, kurių ilgis du kartus didesnis už duotą ilgį, reikės du kartus daugiau plytelių, t. y. $24 \cdot 2 = 48$ (plytelių);
2) du kartus padidinus plotį plytelių taip pat reikės du kartus daugiau, t. y. $24 \cdot 2 = 48$ (plytelių);
3) padidinus ir ilgį, ir plotį du kartus plytelių reikės 4 kartus daugiau, t. y. $24 \cdot 4 = 96$ (plytelių);

b) 1) 8 dėžes;
2) pirkdami 10 dėžių po 10 plytelių turėsime 100 plytelių. Kadangi plytelių skaldyti negalima ir reikia jas visas suklijuoti, tai teoriškai galimi tokie stačiakampiai: 1 plytelė × 100 plytelių, t. y. 15 cm × 1500 cm; 2 plytelės × 50 plytelių, t. y. 30 cm × 750 cm; 4 plytelės × 25 plytelės, t. y. 60 cm × 375 cm; 5 plytelės × 20 plytelių, t. y. 75 cm × 300 cm; 10 plytelių × 10 plytelių, t. y. 150 cm × 150 cm.

Su mokiniais galima aptarti, kokie stačiakampio formos dušo kabinos grindų matmenys tinkamiausi.

271. Kai $y = 2\frac{1}{3}$, tai $y + \frac{y-\frac{1}{3}}{y+\frac{2}{3}} = 2\frac{1}{3} + \frac{2\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{2\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 2\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 3$.

272. 1) 9 klasės mokinių skaičius skritulinėje diagramoje atitinka 90° kampą, t. y. ketvirtadalį visų mokinių, o tai sudaro $\frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$.
2) Jei devintokų yra 50, tai mokykloje mokosi $50 \cdot 4 = 200$ (mokinių).
3) Iš pateiktų duomenų pasakyti, kiek mokykloje mokosi dešimtokų, negalima. Iš diagramos matome, kad dešimtokų tikrai yra mažiau negu devintokų. Tiesa, *iš akies* galima spėti, kad penktokai, dešimtokai ir devintokai sudaro pusę mokyklos mokinių (juos žymintis centrinis kampas lygus 180°), o penktokų ir dešimtokų yra po lygiai. Taip samprotaudami gauname, kad dešimtokų yra 25. Bet mūsų gautas rezultatas gali būti netikslus, kadangi sąlygoje nėra nurodyti kampų dydžiai.

273.

Patalpos pavadinimas	Ilgis (m)	Plotis (m)	Plotas (m^2)
Svetainė	6	4	24
Miegamasis	4	5	20
Koridorius	3	3	9
Virtuvė	3	3	9
Vonios kambarys	4	2	8

274. Klaida padaryta pakeitus lygybę $\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$ lygybe $4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$, nes skirtumas $4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2} < 0$, t. y. neteisingai ištraukta kvadratinė šaknis. Turėjo būti $\left|4 - \frac{9}{2}\right| = \left|5 - \frac{9}{2}\right|$.

$\sqrt{a^2} = |a|$.

3.4. Dviejų narių skirtumo ir jų sumos sandaugos formulė

Skyrelio teorinė medžiaga išdėstyta glaustai. Įrodoma dviejų narių skirtumo ir jų sumos sandaugos formulė. Tai jau trečioji greitosios daugybos formulė.
Pagrindinis tikslas — išmokyti pakeisti dviejų narių skirtumo ir jų sumos sandaugą šių narių kvadratų skirtumu.

Pakartoti:
daugianarių daugybos taisyklę;
sudėties perstatymo savybę.

Išmokti:
dviejų narių skirtumo ir jų sumos sandaugą pakeisti tų narių kvadratų skirtumu;
užrašyti šią formulę raidėmis ir mokėti nusakyti žodžiais.

Šiame skyrelyje:

1. Pritaikius daugianarių daugybos taisyklę įrodoma formulė: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
   Ji užrašoma žodžiais:

   Dviejų narių skirtumo ir jų sumos sandauga lygi šių narių kvadratų skirtumui.

   Ir simboliais: $(\triangle - \square)\cdot(\triangle + \square) = \triangle^2 - \square^2$.
2. Pavyzdžiais parodoma, kaip galima šią formulę pritaikyti. Būtina atkreipti mokinių dėmesį į antrojo pavyzdžio sprendimą.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

275–285 uždaviniai yra teminiai. Prie teminių galima priskirti ir 286 pratimą, nes pertvarkyti reiškinį galima ir taikant kvadratų skirtumo formulę. Likusi uždavinių dalis skirta kartojimui. Naudinga prisiminti dvinario kėlimą kvadratu (286, 287, 288), trikampio braižymą, kai duotos dvi kraštinės ir kampas tarp jų arba visos trys kraštinės (289), veiksmus su paprastosiomis ir dešimtainėmis trupmenomis (290), tekstinių uždavinių sprendimą (291), figūrų plotų skaičiavimą (292, 293). 47–57

275.

Dviejų narių skirtumo ir jų sumos sandauga	Pirmo nario kvadratas	Antro nario kvadratas
$(p-q)(p+q)$	p^2	q^2
$(m-1)(m+1)$	m^2	1^2
$(2x-p)(2x+p)$	$(2x)^2$	p^2
$(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)$	$(\sqrt{7})^2$	1^2

276. a) 7^2; b) $(3b)^2$; c) $\left(\frac{1}{2}m\right)^2$ ir $\left(\frac{1}{3}n\right)^2$.

277. a) x^2-9; b) $16-y^2$; c) m^4-16; d) $4a^2-b^4$;
e) $\frac{1}{25}a^2-\frac{1}{16}b^2$; f) $2\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{36}y^2$.

278. Turėtų būti:
a) $\underline{4}a^2-b^2$; b) $\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{\underline{49}}y^2$; c) $9\underline{x^4}-0{,}04y^6$.

279. a) 6396; b) 39 900; c) 3956; d) 9991. Žr. teorinės dalies 1 pavyzdį.

280. a) n^2-m^2; b) a^2-p^2; c) y^2-4x^2; d) $16b^2-49a^2$; Žr. teorinės dalies 2 pavyzdį.
e) n^2-9m^2; f) k^4-25m^2.

281. a) b; b) $5a$ ir $5a$; c) 6; 6 ir $100m^8$; d) $9a^5$ ir $9a^5$.

282. *Nurodymas.* Prieš spręsdami šį pratimą išanalizuokite vadovėlyje pateikto pavyzdžio du sprendimo būdus. Mokiniai galėtų pasirinkti jiems suprantamesnį būdą.
a) $-x^2+y^2$; b) $-16a^2+b^2$; c) $-p^4+9q^2$; d) $-100x^4+9y^6$.

283. a) 2; b) -7; c) 14; d) 19. Pakartokite lygybę $(\sqrt{a})^2=a$, kai $a \geqslant 0$.

284. *Nurodymas.* Šis pratimas yra sudėtingesnis, nes sprendžiant a) ir b) punktus dviejų narių skirtumo ir jų sumos sandaugos formulė taikoma du kartus, o sprendžiant c) ir d) punktus taikoma dar ir laipsnių savybė $a^2b^2=(ab)^2$.
a) $(x-3)(x+3)(x^2+9)=(x^2-9)(x^2+9)=x^4-81$;
b) $(p^2+1)(p+1)(p-1)=(p^2+1)(p^2-1)=p^4-1$;
c) $(a-5)^2(a+5)^2=\big((a-5)\cdot(a+5)\big)^2=(a^2-25)^2=a^4-50a^2+625$;
d) $(7+y)^2(7-y)^2=((7+y)(7-y))^2=(49-y^2)^2=2401-98y^2+y^4$.

285. a) $-4-4a$; b) $0{,}01+10x-2x^2$; c) $-\frac{5}{16}a+\frac{5}{16}x+\frac{1}{16}-a^2$;
d) $6a-7\frac{24}{25}a^2-4$; e) $-2x^2-16x+76$; f) $15a^2+8ab+2b^2$.

286. *Nurodymas.* Išnagrinėkite vadovėlyje pateiktą pavyzdį, prie kurio yra pastaba, kad reiškinį galima pertvarkyti ir taikant kvadratų skirtumo formulę. Su gabesniais mokiniais galima pamėginti tai atlikti, nors šios formulės taikymas bus 7 skyrelyje.
Pertvarkius reiškinius gauname:
a) $7(2n+7)$; b) $4n$; c) $4(4n^2+10n+4)$; d) $8(2n+1)$.

287. *I būdas.* $(a-b)^2-(a+b)^2=((a-b)-(a+b))((a-b)+(a+b))=$
$=(a-b-a-b)(a-b+a+b)=-2b\cdot 2a=-4ab.$
II būdas. $(a-b)^2-(a+b)^2=a^2-2ab+b^2-(a^2+2ab+b^2)=$
$=a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2=-4ab.$
a) $-17{,}3$; b) 6; c) 0.

Pakartokite, kaip užrašoma dešimtainė periodinė trupmena. Pavyzdžiui, $0,(3)=0{,}333...=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

288. Visos lygybės yra tapatybės. Reikėtų prisiminti, kaip įsitikiname, kad lygybė yra tapatybė.

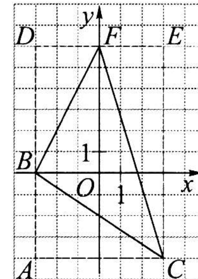
289. a) Braižome kampą, lygų 110°. Skriestuvu arba liniuote su padalomis kraštinėse nuo kampo viršūnės atidedame 4 cm ir 2 cm ilgio atkarpas. Sujungę atkarpų galus gauname ieškomą trikampį.
b) Pirmiausia randame trečią kraštinę: $13-(4+3)=6$ (cm). Braižome trikampį, kai duotos trys kraštinės.
Patogiausia iš pradžių nubrėžti ilgiausią atkarpą (6 cm) ir iš jos galų brėžti apskritimus, kurių spinduliai atitinkamai lygūs 4 cm ir 3 cm. Apskritimų susikirtimo tašką sujungę su atkarpos galais gausime reikiamą trikampį.

Galima paprašyti mokinių nubraižyti neegzistuojantį trikampį, pavyzdžiui: „dvi kraštinės yra 8 cm ir 4 cm, o perimetras — 16 cm“.

290. a) -18; b) -2.

291. Per 1 h pirmu vamzdžiu leidžiant vandenį galima pripildyti $\frac{1}{3}$, antru — $\frac{1}{4}$, trečiu — $\frac{1}{6}$, o visais trim kartu — $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ baseino. Pripildyti visą baseiną prireiks $1:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ (h), t. y. 1 h 20 min.

Uždavinį galima spręsti sudarant lygtį: $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\cdot x=1$, $x=1\frac{1}{3}$ (h).



292. *I būdas.* Suskaičiuojame, kiek yra pilnų kvadratėlių, ir prie šio skaičiaus pridedame nepilnų kvadratėlių skaičių, padalytą iš dviejų (tardami, kad du nepilni kvadratėliai lygūs vienam pilnam): $12+\frac{24}{2}=24$ (langeliai).
II būdas. Papildome brėžinį iki stačiakampio ir iš jo ploto atimame trijų stačiųjų trikampių plotų sumą. Gausime tiksliai apskaičiuotą plotą:
$S_{FBC}=S_{ADEC}-(S_{ABC}+S_{BDF}+S_{FEC})=AD\cdot DE-(\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC+\frac{1}{2}\cdot BD\cdot DF+\frac{1}{2}\cdot FE\cdot EC)=10\cdot 6-\frac{1}{2}(4\cdot 6+6\cdot 3+3\cdot 10)=60-\frac{1}{2}\cdot 72=24.$
Pastaba. Galima įrodyti, kad ir pirmuoju būdu skaičiuodami visada gausime *tikslų* atsakymą (jei tik trikampio ar daugiakampio viršūnės yra kvadratėlių viršūnėse). Visiškai nesunku įsitikinti šio teiginio teisingumu statiesiems trikampiams, kurių statiniai eina vertikaliai ir horizontaliai (panagrinėjus, pavyzdžiui, trikampį BOF ir jam lygų trikampį BDF). Dabar imkime taškus $K(0;-2)$ ir $L(0;-4)$. Tada $S_{FBC}=S_{OBF}+S_{OBK}+S_{KFC}=S_{LFC}-S_{LKC}$.

293. a) $S=2\cdot 7\cdot 200+14\cdot 200=5600$ (cm^2);
b) $S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 7\cdot 200=1400\pi$ (cm^2) ≈ 4396 (cm^2).

3.5. Bendro dauginamojo iškėlimas prieš skliaustus

Nuo šio skyrelio mokoma daugianarį skaidyti dauginamaisiais. Tai labai svarbi tema, nes skaidyti dauginamaisiais tenka sprendžiant įvairius uždavinius: aukštesnio negu pirmojo laipsnio lygtis, racionaliąsias lygtis, nelygybes, prastinant trupmeninius reiškinius ir pan. Taikant daugybos skirstymo dėsnį jau nuo 5 klasės buvo mokoma iškelti bendrą dauginamąjį prieš skliaustus. Šiame skyrelyje toks pertvarkymas pavadinamas *daugianario skaidymu dauginamaisiais* ir mokoma prieš skliaustus iškelti ne tik skaitinį ar raidinį dauginamąjį, bet ir reiškinį.

Pagrindinis tikslas — išmokyti daugianarį pertvarkyti į sandaugą iškeliant bendrą dauginamąjį prieš skliaustus (galima sakyti ir „už skliaustų“).

Pakartoti:

vienanarių daugybą;
vienanario daugybą iš daugianario.

Išmokti skaidyti dauginamaisiais daugianarį iškeliant bendrą dauginamąjį prieš skliaustus.

Šiame skyrelyje:

1. Daugianario pertvarkymas į sandaugą pavadinamas daugianario skaidymu dauginamaisiais.
2. Pavyzdžiu parodoma, kaip paprasčiau apskaičiuojama reiškinio reikšmė, kai daugianaris išskaidomas dauginamaisiais iškeliant bendrą dauginamąjį prieš skliaustus.
3. Pavyzdžiu parodoma, kaip išspręsti lygtį, kurios vieną pusę galima išskaidyti dauginamaisiais, o kita lygties pusė lygi nuliui.
4. Parodoma, kaip prieš skliaustus iškeliamas bendras reiškinys.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

294–303 uždaviniai yra teminiai. Likę uždaviniai skirti kartojimui. Naudinga prisiminti tapatybės sąvoką (304), lygčių, kai kelių dauginamųjų sandauga lygi nuliui, sprendimą (305), procentus (306), tekstinių (judėjimo) uždavinių sprendimą (307), trikampio kampų sumos ir priekampio savybes (308), stačiakampio gretasienio tūrio skaičiavimą (310), veiksmus su kvadratinėmis šaknimis (311), atlyginimo skaičiavimą (312), pagrindinę trupmenos savybę (313). 309 ir 314 — dėsningumų ieškojimas.

58–67

294. a) ay; b) $3x^2yz$; c) $7pq^3$; d) $5xyz$.

295. a) 3; b) $9x$; c) $2xz$; d) mnk; e) $10ab$; f) $9xy$.

296. a) $4(m+n)$; b) $11(x-y)$; c) $3(5x-3y)$; d) $4(5a+2b)$;
e) $-2a(x+2)$; f) $b(b^2-2b-1)$.

297. a) 2500; b) 3700; c) 27 000; d) 15.

298. a) $(a+b)(x+y)$; b) $(x-y)(5-a)$; c) $(a+3)(a+3-y)$;
d) $(9+x)(-3x-36)=-3(9+x)(x+12)$.

299. a) 0; −5; b) 0; $\frac{1}{2}$; c) 0; $\frac{1}{4}$; d) 0; $\frac{2}{3}$.

Žr. teorinėje dalyje išnagrinėtą pavyzdį.

300. a) $a(a+15)$; 8500; 5950; b) $2a(b-1)$; 300;
c) $5xy(x-2)$; 153,6; d) $10x^2(3-2x)$; 50; 0.

301. Turėtų būti:
a) $x(4x-5)-20$; b) $-2a(1-3a+6a^2)$; c) $(x+y)(3x+3y-a)$;
d) $(p-a)(5-2a(p-a))$.

302. *Nurodymas.* Išskaidžius reiškinį dauginamaisiais galima įsitikinti, kad reiškinys dalijasi iš atitinkamo skaičiaus.
a) $2^{13}-2^{10}-2^9=2^9(2^4-2-1)=2^9(16-3)=2^9\cdot 13$;
b) $5^5\cdot 101$; c) $3^7\cdot 11=3^6\cdot 33$; d) $4^2\cdot 49$.

303. *Nurodymas.* Prieš spręsdami šį pratimą išanalizuokite pateiktą pavyzdį.
a) $(x-y)(2a+1)$; b) $(p-a)(1-2a)$; c) $(x-1)(4x+1)$;
d) $(2x+1)(0{,}5+x)$; e) $(x-a)(3-m)$; f) $(k+5)(2+x)$;
g) $(a-b)(3x-2y)$; h) $(2x-y)(7p+8q)$.

304. a), b) ir c) punktų lygybės yra tapatybės, o punkto d) — nėra tapatybė.

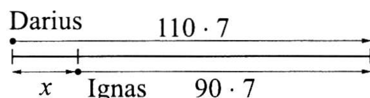
305. a) $\frac{1}{7}$; $7\frac{1}{7}$; b) $-1\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{8}$; c) 16; 6; d) $-4\frac{1}{4}$; $1\frac{2}{9}$.

Pakartokite, kada sandauga lygi nuliui.

306. 2 dm 8 mm = 20 cm + 0,8 cm = 20,8 cm. Toliau galima spręsti taip: kadangi 20% yra penktadalis, tai visos atkarpos ilgis yra $20{,}8\cdot 5=104$ (cm).
Arba sudarant propociją:

$$\begin{matrix} 20{,}8\text{ cm} — 20\% \\ x\text{ cm} — 100\% \end{matrix} \longrightarrow x=104\text{ (cm)}.$$

307. Sprendžiant šį uždavinį patogu nusibraižyti judėjimo schemą. Pavyzdžiui:



I būdas. Per 7 min. Darius nuėjo $110 \cdot 7 = 770$ (m), o Ignas — $90 \cdot 7 = 630$ (m). Taigi tarp vaikinų buvo $770 - 630 = 140$ (m), t. y. $x = 140$ m.
II būdas. Per 1 minutę Darius prisiveja Igną $110 - 90 = 20$ (m), o per 7 minutes — $20 \cdot 7 = 140$ (m).
Atsakymas. 140 m.

308. a) Taikome trikampio priekampio savybę: $40° + 2x = 120°$, $x = 40°$;
b) sprendimas analogiškas punkto a) sprendimui: $49° + 52° = x$, $x = 101°$;
c) galima sudaryti lygtį, pavyzdžiui: $x + 60° = 90° - 18°$, $x = 12°$.

309. a) $y = 25 + x$

x	−20	−15	10	−45	−40	0
y	5	10	35	−20	−15	25

b) $y = -\frac{1}{3}x$

x	21	−15	−90	−5	−63	0
y	−7	5	30	$1\frac{2}{3}$	21	0

310. Spręsti galima sudarant reiškinį:
$30 \cdot 30 \cdot 30 + 30 \cdot 30 \cdot 20 + 30 \cdot 30 \cdot 10 = 30 \cdot 30 \cdot (30 + 20 + 10) = 54\,000$ (cm^3).
Pastaba. Betono kiekis dažniausiai matuojamas kubiniais metrais (sakoma „kubas betono", „du kubai" ir pan). Todėl patartina paprašyti rezultatą užrašyti kubiniais metrais.

$1\text{ m}^3 = 1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ m} = 100\text{ cm} \times 100\text{ cm} \times 100\text{ cm} = 1\,000\,000\text{ cm}^3$.

$54\,000\text{ cm}^3 = 0{,}054\text{ m}^3$.

311. a) 6; b) 21.

312. a) 997,5 Lt; b) 208,07 Lt; c) 29,93 Lt; d) 759,5 Lt.
Pastaba. Reikia prisiminti, kad:
skaičiuojant atlyginimus skaičiai apvalinami iki šimtųjų;
mokestis *SODRAI* sudaro 3% priskaičiuoto atlyginimo (nuo 2000 01 01);
pajamų mokestis sudaro 33% priskaičiuoto atlyginimo dalies, viršijančios neapmokestinamąjį minimumą.

313. *Nurodymas.* Prisiminkite pagrindinę trupmenos savybę.
$\frac{4}{19} = \frac{4 \cdot 4}{19 \cdot 4} = \frac{16}{76}$; $\frac{4}{19} = \frac{4 \cdot 5}{19 \cdot 15} = \frac{20}{95}$.

314. Turime atspėti taisyklę, pagal kurią parašyti skaičiai pirmoje ir antroje eilutėje, ir pagal ją rasti skaičių, tinkamą trečiai eilutei. Surašykime pirmąsias abėcėlės raides ir jas sunumeruokime:

A	Ą	B	C	Č	D	E	Ę	Ė	F	G	H	I	Į ...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Pastebėkime, kad skaičiai tarp raidžių pirmose dviejose eilutėse yra tas raides atitinkančių skaičių aritmetinis vidurkis, t. y. $5 = \frac{6+4}{2}$; $8 = \frac{3+13}{2}$. Vadinasi, vietoj daugtaškio turėtų būti skaičius 3, nes $\frac{5+1}{2} = 3$.

3.6. Daugianarių skaidymas dauginamaisiais grupavimo būdu

Daugianarį išskaidyti dauginamaisiais yra sunkiau negu sandaugą parašyti daugianariu. Šio skyrelio medžiaga yra nelengva ir todėl, kad nereikia taikyti jokių formulių, o reikia pastabumo. Tai nauja teorinė medžiaga. Reikia labai atidžiai išanalizuoti teorinėje dalyje pateiktą pavyzdį. Naudinga mokiniams parodyti, kad narius galima grupuoti įvairiais būdais, bet išskaidžius daugianarį dauginamaisiais sandauga bus ta pati. Svarbu atlikti pateiktą užduotį. Tikslas — išmokyti daugianario narius atitinkamai sugrupuoti ir tada išskaidyti dauginamaisiais.

Pastaba. Ne visada daugianarius galima išskaidyti dauginamaisiais, todėl galite pateikti pavyzdžių daugianarių, kurie neišsiskaidytų dauginamaisiais.

Pakartoti:

sudėties perstatymo dėsnį;

algebrinės sumos sąvoką;

atskliautimo taisykles;

sandaugos lygios nuliui savybę.

Išmokti:

grupuoti narius, kad daugianarį būtų galima išskaidyti dauginamaisiais;

skaidyti daugianarį dauginamaisiais grupavimo būdu.

Šiame skyrelyje:

1. Pateikiamas pavyzdys, kai daugianaris išskaidomas dauginamaisiais prieš tai atitinkamai sugrupavus jo narius.

   Toks daugianarių skaidymas dauginamaisiais pavadinamas daugianarių skaidymu dauginamaisiais grupavimo būdu.

2. Pavyzdžiu parodoma, kaip pakeitus daugianario vieną narį dviejų narių algebrine suma kartais galima sugrupuoti narius ir išskaidyti daugianarį dauginamaisiais.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

315–322 uždaviniai yra teminiai, kiti skirti kartojimui. Naudinga pakartoti tapatybės sąvoką (323), jau žinomas formules $(a \pm b)^2$ ir $(a-b)(a+b)$ (324), judėjimo upe uždavinių sprendimą (325), figūrų tūrių skaičiavimą (326), mastelio sąvoką (327), veiksmus su laipsniais (328) ir šaknimis (329), procentus (330), bendro dauginamojo iškėlimą prieš skliaustus (331), plotų skaičiavimą (332). 68–74

315. a) $(y+z)(x+1)$; b) $(a-b)(3a+1)$;
c) $(x+y)(5a+1)$; d) $(m-n)(4x+1)$.

316. a) $(b+c)(a+3)$; b) $(m+y)(7+k)$; c) $(x+y)(6+a)$;
d) $(m-n)(2+x)$; e) $(x+5)(b-a)$; f) $(3-x)(p+x)$.

317. a) 5000; b) 3000; c) 19,5; d) 20.

318. *Nurodymas.* Atkreipkite dėmesį į pateiktą pavyzdį, kai grupuojant narius prieš skliaustus iškeliamas minus vienetas (kartais tiesiog sakoma „minuso ženklas“).
a) $(a-b)(m-2)$; b) $(x+y)(a-3)$; c) $(y+z)(x-1)$;
d) $(m-k)(p-1)$; e) $(a-b)(5+m)$; f) $(b+c)(3a-2)$.

319. a) Šio pavyzdžio galimi du atsakymai, nes daugtaškio vietoje galime parašyti arba $+b^2$, arba $+a^2$. Jei parašysime $+b^2$, gausime:
$ab+ax+bx+b^2=(ab+ax)+(bx+b^2)=a(b+x)+b(x+b)=$
$=(b+x)(a+b)$.
Jei parašysime $+a^2$, gausime:
$ab+ax+bx+a^2=(ab+a^2)+(ax+bx)=a(b+a)+x(a+b)=$
$=(a+b)(a+x)$;
b) $(m+n)(a-b)$; įrašyti reikia $-bn$;
c) $(1-2ax)(9+ax)$; įrašyti reikia $-2a^2x^2$;
d) $(2-5p)(5m+p)$; įrašyti reikia $+2p$.

320. Uždavinys skirtas mokinių savarankiškam darbui.

321. a) $x^2+2x+4x+8=(x+2)(x+4)$;
$(x+2)(x+4)=0$, $x=-2$ arba $x=-4$;
b) $x^2-3x+2x-6=(x-3)(x+2)$;
$(x-3)(x+2)=0$, $x=3$ arba $x=-2$;
c) $5x-x^2+10-2x=(x+2)(5-x)$;
$(x+2)(5-x)=0$, $x=-2$ arba $x=5$;
d) $7x-x^2-14x+2x=-x^2-5x=-x(x+5)$;
$-x(x+5)=0$, $x=0$ arba $x=-5$.

322. a) $x^2 + 4x + 3 = x^2 + x + 3x + 3 = (x + 1)(x + 3)$;
b) $a^2 + 6a + 5 = a^2 + 5a + a + 5 = (a + 1)(a + 5)$;
c) $y^2 - 4y - 5 = y^2 + y - 5y - 5 = (y + 1)(y - 5)$;
d) $m^2 - 9m - 10 = m^2 + m - 10m - 10 = (m + 1)(m - 10)$.

323. Tapatybė yra tik c) punkto lygybė.

324. Suprastinę reiškinius gauname:
a) 53; b) −130; c) 4; d) 49.

325. a) Sakykime, kad srovės greitis yra x km/h. Pagal sąlygą sudarome lygtį: $(15 + x) \cdot 2 = (15 - x) \cdot 3$, $x = 3$.
b) Sakykime, kad „Raketos“ savasis greitis yra y km/h. Pagal sąlygą sudarome lygtį: $(y + 3) \cdot 4{,}5 = (y - 3) \cdot 5$, $y = 57$.
Atsakymas. a) 3 km/h; b) 57 km/h.

326. a) $V = 3 \cdot 4 \cdot (2 + 2 + 2) - 2 \cdot 1 \cdot 4 = 64$ (tūrio vienetai);
b) $V = 9 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 = 80$ (tūrio vienetų).

327. 5 m = 500 cm. Vadinasi, 1 cm žemėlapyje atitinka 500 cm vietovėje.
Atsakymas. **C**.

328. a) $-\frac{2}{9}$; b) -26.

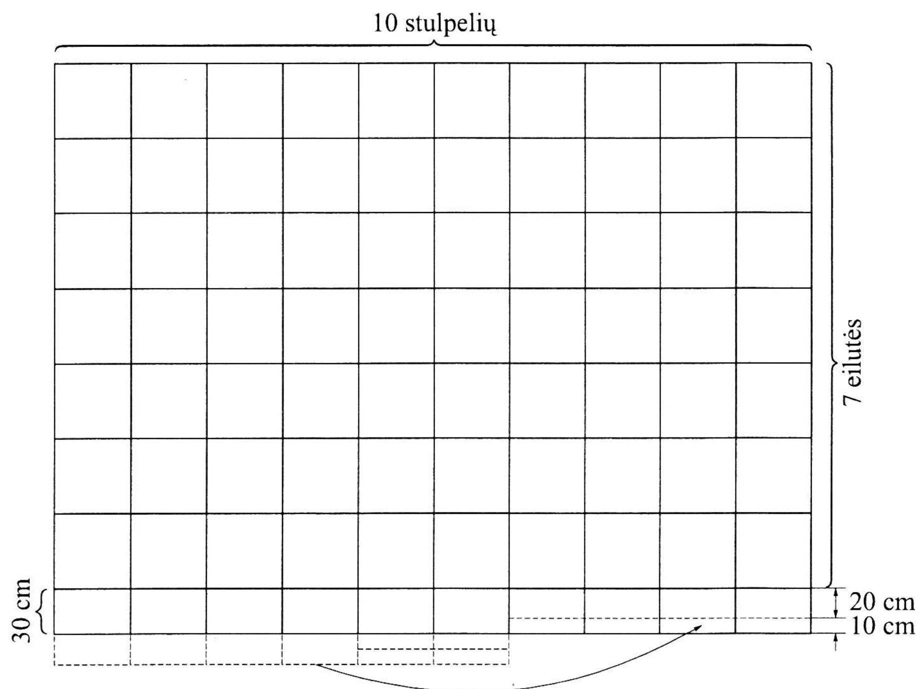
329. a) $\sqrt{8}$; b) $2\sqrt{2}$.

Vadovėlyje yra korektūros klaida. Turi būti punktai a) ir b).

330. a) $\begin{matrix} 60\,\text{kg} - 100\% \\ 20\,\text{kg} - x\% \end{matrix} \longrightarrow x = 33\frac{1}{3}$; b) $\begin{matrix} 20\,\text{kg} - 100\% \\ 60\,\text{kg} - y\% \end{matrix} \longrightarrow y = 300$.

331. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.
a) 120; b) 1275; c) 5050.

332. a) $S_{\text{st}} = 1\frac{1}{2} \cdot 1 = 1{,}5\,(\text{m}^2)$; $S_{\text{grindų}} = 6 \cdot 3 = 18\,(\text{m}^2)$. Kadangi $1{,}5\,\text{m}^2$ plotui iškloti reikia 24 mažų plytelių, tai $18\,\text{m}^2$ plotui iškloti reikės $\frac{18 \cdot 24}{1{,}5} = 288$ (plytelių);
b) $S_{\text{st}} = 1\frac{1}{2} \cdot 1 = 1{,}5\,(\text{m}^2)$; $S_{\text{grindų}} = 5 \cdot 3{,}8 = 19\,(\text{m}^2)$. Kadangi $1{,}5\,\text{m}^2$ plotui iškloti reikia 6 didelių plytelių, tai $19\,\text{m}^2$ plotui iškloti reikės $\frac{19 \cdot 6}{1{,}5} = 76$ (plytelių).
Pastaba. b) punkte plyteles reikės skaldyti. Paprašykite mokinių nubraižyti brėžinį.



3.7. Daugianarių skaidymas dauginamaisiais taikant greitosios daugybos formules

Šiame skyrelyje mokoma skaidyti dauginamaisiais taikant greitosios daugybos formules. Vienas iš pagrindinių tikslų — išmokyti trinarį pakeisti dvinario kvadratu bei dviejų reiškinių kvadratų skirtumą išreikšti sandauga.

Pakartoti formules:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Išmokti skaidyti daugianarius dauginamaisiais taikant greitosios daugybos formules.

Šiame skyrelyje:

1. Užrašomos greitosios daugybos formulės sukeitus dešinę ir kairę puses vietomis:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2;$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

2. Pavyzdžiais parodomas šių formulių taikymas skaidant daugianarius dauginamaisiais.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

333–343 uždaviniai yra teminiai. Likę uždaviniai skirti kartojimui. Naudinga prisiminti dvinario kėlimą kvadratu (344, 345, 346, 347), daugianarių daugybos taisyklę (348, 349), stačiakampio ploto formulę (350), vidutinio greičio radimą (351), trikampių lygumo požymius (352).

75–85

333. a) $(m+1)^2$; b) $(p-1)^2$; c) $(y-2)^2$; d) $(a+3)^2$; e) $(10+p)^2$;
f) $(9-y)^2$; g) $(a-4b)^2$; h) $(m+5n)^2$; i) $(2-3c)^2$.

Punkte c) yra klaida. Turėtų būti ne $4m$, o $4y$.

334. a) 1; b) 9; c) $8y$; d) 9.
Pastaba. Sąlygą geriau būtų formuluoti taip: „Ką reikėtų parašyti debesėlio vietoje...“, nes c) punkte debesėlio vietoje reikia parašyti reiškinį, t. y. $8y$.

335. a) 3600; b) 1600; c) 400; d) 1600.

336. a) $(y-1)^2$; 144; 0,16; $\frac{9}{25}$; b) $(3a+4)^2$; 4; 30,25; $22\frac{9}{16}$;
c) $(8-5x)^2$; 9; 49; 51,84; d) $-(3+10b)^2$; -729; -196; -49.

Galima pasinaudoti natūraliųjų skaičių kvadratų lentele, esančia vadovėlio 175 p.

337. a) $x^2 - 20x + 100 = (x-10)^2$;
b) $64x^2 + 96xy + 36y^2 = (8x+6y)^2$;
c) $100a^2 + 160ab + 64b^2 = (10a+8b)^2$;
d) $(3a+0{,}7c)^2 = 9a^2 + 4{,}2ac + 0{,}49c^2$;
e) $(6m+5n)^2 = 36m^2 + 60mn + 25n^2$;
f) $\left(\frac{1}{3}ax - \frac{1}{5}ay\right)^2 = \frac{1}{9}a^2x^2 - \frac{2}{15}a^2xy + \frac{1}{25}a^2y^2$.

338. a) **C**; b) **B**.

339. a) $(m-n)(m+n)$; b) $(a-2)(a+2)$; c) $(5-x)(5+x)$;
d) $(1-9x)(1+9x)$; e) $\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{10}\right)\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{10}\right)$; f) $\left(\frac{1}{4}ax - \frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{4}ax + \frac{1}{2}b\right)$.

340. a) 120; b) 5200; c) $-0{,}5$; d) $-\frac{3}{7}$;
e) $\frac{121^2-11^2}{36^2-24^2} = \frac{(121-11)(121+11)}{(36-24)(36+24)} = \frac{110\cdot132}{12\cdot60} = 20\frac{1}{6}$;
f) $\frac{58^2-42^2}{73^2-27^2} = \frac{(58-42)(58+42)}{(73-27)(73+27)} = \frac{16\cdot100}{46\cdot100} = \frac{8}{23}$.

341. a) **B**; b) **A**; c) **B**.

342. a) -6; 6; b) $-0{,}8$; 0,8; c) $-\frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}$; d) $-1\frac{3}{7}$; $1\frac{3}{7}$; e) $-1\frac{1}{5}$; $1\frac{1}{5}$;
f) $-1\frac{1}{27}$; $1\frac{1}{27}$.

343. Žiedo plotą randame pagal formulę: $S = \pi R^2 - \pi r^2 = (R^2 - r^2)\pi$.
a) $4\pi \approx 12{,}56$; b) $16{,}5\pi \approx 51{,}81$; c) $230{,}4\pi \approx 723{,}456$.

344. Iš sąlygos aišku, kad atkarpos dalys yra nelygios. Tarkime, kad ilgesniosios atkarpos ilgis yra x cm. Tada trumpesniosios atkarpos ilgis bus $(20-x)$ cm. Žinodami, kad kvadratų, nubraižytų ant kiekvienos šių atkarpų, plotų skirtumas lygus 40 cm^2, sudarome lygtį:
$x^2 - (20-x)^2 = 40$, $x = 11$; $20 - x = 20 - 11 = 9$ (cm).
Atsakymas. 11 cm ir 9 cm.

345. Du gretimi lyginiai skaičiai skiriasi 2. Jei mažesnis x, tai didesnis $x+2$. Tada $(x+2)^2 - x^2 = 28$, $x = 6$. Vadinasi, tai 6 ir 8.
Du gretimi nelyginiai skaičiai skiriasi 2. Jei skaičiai yra x ir $x+2$, tai $(x+2)^2 - x^2 = 32$, $x = 7$. Vadinasi, tai 7 ir 9.

346. a) $(6n+1)^2 - 49 = 36n^2 + 12n - 48 = 12(3n^2 + n - 4)$. Akivaizdu, kad sandauga $12(3n^2 + n - 4)$ su visais n dalijasi iš 12.

b) $(3n+5)^2 - 16 = (3n+5-4)(3n+5+4) = (3n+1)(3n+9) = 3(3n+1)(n+3)$. Gauta sandauga su visais n dalijasi iš 3, bet ne su visais dalijasi iš 9, pavyzdžiui, ji nesidalija iš 9, kai $n = 1, 2, 4, 5$ ir t. t. (t. y. kai n nesidalija iš 3).

347.

A	B	A^2	B^2	AB	A − B
$1-\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$	$4-2\sqrt{3}$	$4+2\sqrt{3}$	-2	$-2\sqrt{3}$
$2\sqrt{5}+1$	$2\sqrt{5}-1$	$21+4\sqrt{5}$	$21-4\sqrt{5}$	19	2
$3\sqrt{11}-4\sqrt{7}$	$4\sqrt{7}+3\sqrt{11}$	$211-24\sqrt{77}$	$211+24\sqrt{77}$	-13	$-8\sqrt{7}$

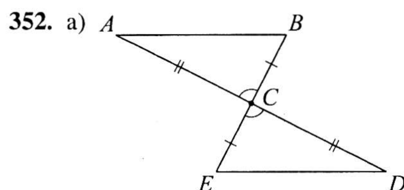
348. Tapatybė yra tik d) punkto lygybė.

349. a) $3x^5 + 9x^6 - 30x^4$; b) $-2y^2 + 8y^4 - 14y$; c) $-n^2 + 2n$;
d) $32a - 9a^2$; e) $-10a^3b + 10a^4b^2 + 5a^5b$; f) $6x^4y^2 - 12x^4y^3 - 18x^3y^2$.

350. Sakykime, kad kvadratinės formelės kraštinės ilgis yra x mm. Tada stačiakampės formelės ilgis bus $(x+4)$ mm, o plotis — $(x-3)$ mm. Sudarome lygtį: $(x-3)\cdot(x+4) = x^2$, $x = 12$; $x - 3 = 12 - 3 = 9$, $x + 4 = 12 + 4 = 16$.
Atsakymas. Kvadratinės formelės matmenys yra 12 mm × 12 mm; stačiakampės formelės matmenys yra 16 mm × 9 mm.

351. Vidutinis greitis yra kelio ir laiko santykis, todėl jis randamas visą kelią padalijus iš viso laiko.
Sudarome reiškinį ir apskaičiuojame jo reikšmę: $\frac{55{,}6\cdot 1 + 63{,}4\cdot 2}{1+2} = 60{,}8$ (km/h).
Atsakymas. 60,8 km/h.

352. a)



b) Ežero plotis yra 400 m, nes $AB = ED$. Atsakymą gauname pritaikę trikampių lygumo požymį pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų.

4. PITAGORO TEOREMA

Skyriuje nagrinėjamas stačiojo trikampio kraštinių sąryšis. Tas sąryšis, išreikštas formule $c^2 = a^2 + b^2$ (čia a ir b stačiojo trikampio statinių ilgiai, o c — įžambinės ilgis), vadinamas *Pitagoro teorema*. Ją būtina atsiminti ir mokėti įrodyti. Nagrinėjama ir atvirkštinė Pitagoro teorema. Remiantis ja, kai žinomos trikampio kraštinės, galima patikrinti, ar trikampis yra status. Be to, remiantis Pitagoro teorema įrodoma trikampio nelygybė, ir atstumas tarp plokštumos taškų išreiškiamas tų taškų koordinatėmis (400 uždavinys).

Pagrindinis šio skyriaus tikslas — išmokyti taikyti Pitagoro teoremą geometriniams uždaviniams spręsti.

4.1. Pitagoro teorema

Su stačiuoju trikampiu mokiniai susipažino žemesnėse klasėse. Šiame skyrelyje suformuluojama ir įrodoma Pitagoro teorema.

Moksleiviams, kuriems per sunkus pateiktas teoremos įrodymas, galima pasiūlyti atlikti užduotį (106 p.).

Teorinę skyrelio medžiagą galima suskirstyti į dvi dalis:

1) pirmiausia iš konkrečių pavyzdžių braižant, matuojant ir skaičiuojant įsitikinama, kad stačiojo trikampio kraštinių ilgiai susieti lygybe: $c^2 = a^2 + b^2$ (c — įžambinė, a ir b — statiniai);

2) suformuluojama ir įrodoma Pitagoro teorema.

Pakartoti:

stačiojo trikampio apibrėžimą ir kraštinių pavadinimus;
kvadrato ir rombo apibrėžimus;
stačiojo trikampio ir kvadrato plotų formules;
kam lygi trikampio kampų suma;
dviejų narių sumos kvadrato formulę, t. y. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
kvadratinės šaknies apibrėžimą.

Išmokti:

formuluoti ir įrodyti Pitagoro teoremą;
rasti stačiojo trikampio kraštinės ilgį, kai žinomi kitų dviejų jo kraštinių ilgiai.

Šiame skyrelyje:

1. Nubraižomas statusis trikampis, kurio statiniai yra 3 ir 4 ilgio vienetų. Matuojant įsitikinama, kad trikampio įžambinė lygi 5 tokiems ilgio vienetams. Pastebima, kad teisinga lygybė $5^2 = 3^2 + 4^2$.

   Pateikiama analogiška užduotis, kai trikampio statiniai yra 5 ir 12 sąsiuvinio langelių ilgio.

   Remiantis išnagrinėtais pavyzdžiais parašoma apibendrinta lygybė $c^2 = a^2 + b^2$.

2. Suformuluojama ir įrodoma Pitagoro teorema. Teoremos įrodymas suskirstytas į keturis etapus:
   1) duotasis statusis trikampis papildomas iki kvadrato;
   2) nubraižomas keturkampis, kurio viršūnės yra kvadrato kraštinėse;
   3) įrodoma, kad tas keturkampis yra kvadratas;
   4) sulyginus dviem būdais apskaičiuotą to kvadrato plotą gaunama lygybė $c^2 = a^2 + b^2$.

   Pastaba. Uždavinyne 4 skyriaus 24 uždavinyje siūloma įrodyti Pitagoro teoremą, papildant trikampį iki trapecijos. Manome, kad abu įrodymai yra lygiaverčiai, todėl pasirinkite jums labiau patinkantį.

3. Pateikiama kita Pitagoro teoremos formuluotė — joje kalbama apie prie trikampio kraštinių nubraižytų kvadratų plotus. Tuo mokiniai turėtų įsitikinti atlikę užduotį (ją rekomenduojame atlikti namuose).

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Taikant Pitagoro teoremą dažnai tenka iš skaičių traukti kvadratinę šaknį, todėl patartina naudotis skaičiuokliu. Kai kvadratinė šaknis iš skaičiaus nėra natūralusis skaičius, tai ieškoti apytikslės šaknies reikšmės patartume tik tada, kai sprendžiamas praktinio turinio uždavinys arba kai taip skaičiuoti nurodyta sąlygoje.

Skaičiuojant statinio ilgį, kai žinomas įžambinės ir kito statinio ilgis, dažnai patogu būna naudotis kvadratų skirtumo formule (pvz., 355, 356, 359, 366).

Teminiai yra 353–366 uždaviniai.

Kiti uždaviniai yra kartojimo: skaičių užrašymas standartine išraiška (367), dauginamojo įkėlimas po šaknies ženklu (368), reiškinių prastinimas (369), lygties sprendimas ir reiškinio reikšmės radimas (370), procentų ir dalies skaičiavimas (371). 372 uždavinys — probleminis. Jį atlikus galima mokiniams pasiūlyti sudaryti pamokų tvarkaraštį visoms aštuntoms klasėms.

1–25, 44–46

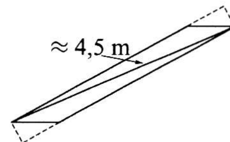
353. a) 15 cm; b) 41 m; c) 17 dm; d) 20 mm; e) 39 dm; f) 25 mm.

354. a) $b = \sqrt{21} = 4{,}582575... \approx 4{,}6$ (m);
b) $b = \sqrt{125} = 11{,}180339... \approx 11{,}2$ (m);
c) $b = \sqrt{2100} = 45{,}825756... \approx 45{,}8$ (m);
d) $b = \sqrt{1} = 1$ (m).

355. a) $c = 41\,\text{cm}$;
b) $b = 20\,\text{mm}$ $(b = \sqrt{101^2 - 99^2} = \sqrt{(101-99)(101+99)} = 20)$;
c) $a = 14\,\text{m}$; d) $c = 5\,\text{cm}$; e) $a = 9\,\text{km}$;
f) $b = 0{,}5\,\text{km}$; g) $a = 2\,\text{dm}$; h) $c = 2\sqrt{3}$.

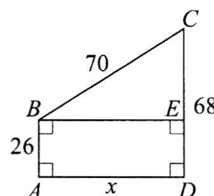
356. Kampainio antrojo statinio ilgis lygus:
$\sqrt{45^2 - 22{,}5^2} = 38{,}971143... \approx 39{,}0\,(\text{cm})$.

357. Pavaizduotiems vartams sutvirtinti užtenka:
$\sqrt{3{,}8^2 + 2{,}4^2} = 4{,}494441...\,(\text{m})$ lentos. Kadangi $4{,}5 > 4{,}494441...$, tai vartams sutvirtinti 4,5 m ilgio lentos užteks.
Pastaba. Įstrižai prikalta lenta yra lygiagretainio formos, kurios didesnioji įstrižainė neviršija 4,5 m. Tokią lygiagretainio formos lentą galima padaryti ir iš trumpesnės negu 4,5 m ilgio stačiakampės lentos, įstrižai nupjovus galus (žr. brėžinį).



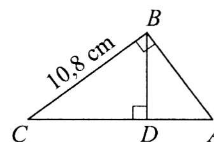
358. a) Taikome Pitagoro teoremą: $AB^2 = CA^2 + CB^2 = 28^2 + 86^2 = 8180\,(\text{m}^2)$;
$AB = \sqrt{8180} = 90{,}443352... \approx 90\,(\text{m})$.
b) Bandant reikia ekerį pastatyti į tokį vietovės tašką C, kad vienoje tiesėje matytume vienos ekerio lentelės du vinukus ir medį. Ekeris bus pastatytas ieškomame taške, jei vienoje tiesėje bus ir kitos ekerio lentelės du vinukai bei antrasis medis.

359. *Nurodymas.* Prieš spręsdami šį pratimą atidžiai išnagrinėkite pateiktą pavyzdį.
a) Brėžiame $BE \perp CD$. $AB = ED = 26$; $CE = CD - ED = 68 - 26 = 42$.
Iš stačiojo trikampio BEC taikydami Pitagoro teoremą randame BE:
$BE = \sqrt{70^2 - 42^2} = \sqrt{(70-42)(70+42)} = \sqrt{28 \cdot 112} = \sqrt{28 \cdot 28 \cdot 4} =$
$= 28 \cdot 2 = 56$. $BE = AD = x = 56$.
b) $x = \sqrt{25^2 - 24^2} + \sqrt{30^2 - 24^2} = 25$.
c) $(2x)^2 - x^2 = 9^2$, $x^2 = 27$, $x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

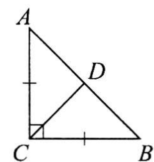


360. a) $c^2 = 2{,}7^2 + 3{,}6^2$; $c = 4{,}5\,\text{dm}$;
$P = a + b + c = 2{,}7 + 3{,}6 + 4{,}5 = 10{,}8\,(\text{dm})$;
$S = \frac{ab}{2} = \frac{2{,}7 \cdot 3{,}6}{2} = 4{,}86\,(\text{dm}^2)$;
b) $a = 1{,}5\,\text{m}$; $P = 24\,\text{m}$; $S = 8{,}4\,\text{m}^2$;
c) $b = 0{,}7\,\text{cm}$; $P = 5{,}6\,\text{cm}$; $S = 0{,}84\,\text{cm}^2$;
d) $c = 17\,\text{cm}$; $P = 36{,}4\,\text{cm}$; $S = 21{,}84\,\text{cm}^2$;
e) $S = \frac{ab}{2}$; $b = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 24}{6} = 8$; $c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$; $P = 24$.

361. a) $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2}$; $AB = \frac{2S}{BC} = \frac{2 \cdot 24{,}3}{10{,}8} = 4{,}5\,(\text{cm})$.
$AC^2 = AB^2 + BC^2$; $AC = \sqrt{4{,}5^2 + 10{,}8^2} = 11{,}7\,(\text{cm})$.
$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2}$; $BD = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \cdot 24{,}3}{11{,}7} = 4\frac{2}{13}\,(\text{cm})$.

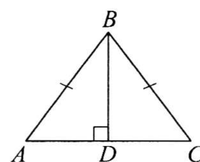


b) *I būdas.* $CD \perp AB$ ir $AD = DB = 10 : 2 = 5\,(\text{cm})$, nes lygiašonio trikampio viršūnės kampo pusiaukampinė CD yra ir aukštinė, ir pusiaukraštinė.
Duota, kad $\angle ACD = \angle BCD = 90° : 2 = 45°$.
Be to, $\angle A = \angle B = 90° : 2 = 45°$. Vadinasi, trikampiai ADC ir BDC taip pat lygiašoniai ir $CD = AD = DB = 5\,\text{cm}$.
$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25\,(\text{cm}^2)$.
II būdas. Iš stačiojo trikampio ACB taikydami Pitagoro teoremą gauname:
$AC^2 + BC^2 = AB^2$, $2AC^2 = 10^2$, $AC = BC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,(\text{cm})$.
$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25\,(\text{cm}^2)$.
$CD \perp AB$, nes lygiašonio trikampio viršūnės kampo pusiaukampinė yra ir aukštinė.
$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CD}{2}$; $CD = \frac{2S}{AB} = \frac{2 \cdot 25}{10} = 5\,(\text{cm})$.

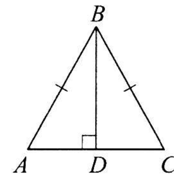


362. a) „Jeigu trikampis yra status.“
b) „Tai įžambinės kvadratas lygus jo statinių kvadratų sumai.“

363. a) *Duota:* $\triangle ABC$, $AB = BC = 20\,\text{cm}$, $AC = 24\,\text{cm}$, $BD \perp AC$.
Rasti: BD.
Sprendimas. Lygiašonio trikampio aukštinė, nubrėžta į pagrindą, yra ir pusiaukraštinė, tai $AD = DC = 24 : 2 = 12\,(\text{cm})$. Iš stačiojo trikampio ABD remdamiesi Pitagoro teorema gauname:
$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 20^2 - 12^2 = 256$; $BD = 16\,\text{cm}$.

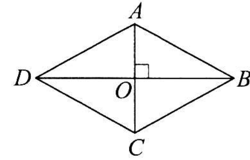


b) *Duota*: $\triangle ABC$, $AB = BC = CA = 6$, $BD \perp AC$.
Rasti: BD.
Sprendimas. $AD = DC = 6 : 2 = 3$. Iš stačiojo trikampio ABD pagal Pitagoro teoremą gauname:
$BD^2 = AB^2 - AD^2 = 6^2 - 3^2 = 27$; $BD = 3\sqrt{3}$.
Atsakymas. a) 16 cm; b) $3\sqrt{3}$.

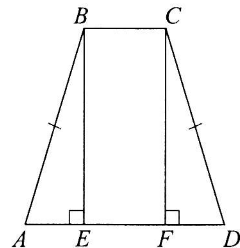


364. Pažymėkime kvadrato kraštinės ilgį a. Tada taikydami Pitagoro teoremą gauname, kad kvadrato įstrižainė lygi $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Kvadrato įstrižainė ilgesnė už jo kraštinę $\frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$ (kartų).

365. *Duota*: $ABCD$ — rombas, $BD = 1{,}4$ m, $AC = 0{,}48$ m.
Rasti: AB.
Sprendimas. Kadangi rombo įstrižainės susikerta statmenai ir dalija viena kitą pusiau, tai $BO = 0{,}7$ m, $AO = 0{,}24$ m ir $\triangle AOB$ status.
Trikampiui AOB taikome Pitagoro teoremą:
$AB^2 = BO^2 + AO^2 = 0{,}7^2 + 0{,}24^2 = 0{,}5476$; $AB = 0{,}74$ (m).
Atsakymas. 0,74 m.



366. *Duota*: $ABCD$ — lygiašonė trapecija, $AB = CD = 50$ cm, $BC = 20$ cm, $AD = 48$ cm, $BE \perp AD$.
Rasti: BE.
Sprendimas. Nubrėžiame trapecijos aukštinę CF. Keturkampis $EBCF$ — stačiakampis, todėl $BC = EF = 20$ cm. $\triangle ABE = \triangle DCF$ (pagal kraštinę ir du kampus prie jos, t. y. $AB = CD$, $\angle A = \angle D$ ir $\angle ABE = \angle DCF$), tai $AE = FD = \frac{48-20}{2} = 14$ (cm). Iš stačiojo trikampio ABE pagal Pitagoro teoremą: $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 50^2 - 14^2 = (50 - 14)(50 + 14) = 36 \cdot 64$; $BE = \sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = 6 \cdot 8 = 48$ (cm).



367. a) $3{,}7 \cdot 10^3$; b) $8{,}4 \cdot 10^{-2}$; c) $6{,}216 \cdot 10^5$; d) $2{,}16 \cdot 10^4$.

368. a) $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}$; b) $\sqrt{18}$; c) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{2}$.

369. a) $2(3x - 2y)(3x + 2y) = 2(9x^2 - 4y^2) = 18x^2 - 8y^2$;
b) $7x^2 - 4x + 9$; c) $-12a$; d) $-24x + 48$.

370. Kadangi $x + 1 = 0$, tai $x = -1$.
Tada $-2x^2 + 3x + 2 = -2(-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2 = -2 - 3 + 2 = -3$.
Atsakymas. **E**.

371. a) $\left(900 \cdot \frac{40}{100}\right) : 10 = 36\,(\ell)$;
b) $\frac{36}{900-360} = \frac{1}{15}$.

372. a) Ne, nes ketvirtadienį yra dvi matematikos pamokos.
b) Aštuoniais. Ketvirtadienio matematikos pamokas sukeičiant vietomis su penktadienio bet kuria iš pirmų keturių pamokų.
c) Šešiais.
d) Klausimas skirtas diskusijoms. Galima aptarti su mokiniais pamokų eilės tvarką, pasiteirauti, kuriuo metu jie būna darbingiausi, kuriomis savaitės dienomis pamokų turėtų būti daugiausiai, kuriomis mažiausiai ir pan.

4.2. Atvirkštinė Pitagoro teorema

Skyrelyje supažindinama su atvirkštine Pitagoro teorema; jos įrodymas pateikiamas sprendžiant konkretų uždavinį.

Svarbiausias skyrelio tikslas — išmokyti nustatyti, ar trikampis yra status, žinant trikampio kraštinių ilgius.

Pakartoti:

teoremos sąlygos ir išvados sąvokas;

kaip iš tiesioginės teoremos gaunama atvirkštinė teorema;

Pitagoro teoremos formulavimą;

trikampių lygumo požymius.

Išmokti formuluoti ir taikyti atvirkštinę Pitagoro teoremą.

Šiame skyrelyje:

1. Primenama Pitagoro teorema.
2. Imant konkretų pavyzdį įrodoma, kad trikampis yra status, jeigu jo vienos kraštinės kvadratas lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai.
3. Be apibendrinto įrodymo teigiama, kad yra teisinga atvirkštinė Pitagoro teorema:

> *Jeigu trikampio vienos kraštinės kvadratas yra lygus kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai, tai tas trikampis yra status.*

4. Pateikiami Pitagoro skaičių trejetų ir Pitagoro trikampių apibrėžimai. Be to, išnagrinėtas pavyzdys, kaip nustatyti, ar trikampis yra Pitagoro, kai duoti trikampio kraštinių ilgiai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 373–379 uždaviniai. 380–384 uždaviniai skirti Pitagoro teoremai taikyti, 385–387 — reiškinių reikšmėms skaičiuoti, prastinti bei skaidyti dauginamaisiais, 388 — lygčiai sudaryti ir spręsti, 389 — skritulio plotui bei apskritimo ilgiui pakartoti, 390 (vadovėlyje jis pažymėtas klaidingai 503) — skritulinės išpjovos kampui bei procentams rasti. 26–30

373. *Nurodymas.* Taikant atvirkštinę Pitagoro teoremą pakanka patikrinti, ar *ilgiausios* trikampio kraštinės kvadratas yra lygus *trumpesniųjų* kraštinių kvadratų sumai.

a) $53^2 = 28^2 + 45^2$ — statusis;
b) $34^2 = 16^2 + 30^2$ — statusis;
c) $32^2 \neq 21^2 + 25^2$ — ne statusis;
d) $122^2 = 120^2 + 22^2$ — statusis.

374. a) $10^2 = 8^2 + x^2$, arba $x^2 = 10^2 + 8^2$,
$x^2 = 36$, $x^2 = 164$,
$x = 6\,(\text{m})$; $x = \sqrt{164}\,(\text{m})$.

Kadangi $\sqrt{164}$ nėra natūralusis skaičius, tai su tokia kraštine trikampis nėra Pitagoro. Taigi trečioji kraštinė lygi 6 m.

Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai.

Atsakymas. a) 6 m; b) 25 dm; c) 29 mm.

375. Sprendžiame kaip ir 374 pratimą, tik čia trečioji trikampio kraštinė nebūtinai sveikasis skaičius.

a) $5^2 = 3^2 + x^2$, arba $x^2 = 3^2 + 5^2$,
$x = 4$; $x = \sqrt{34}$.

Taigi trečioji kraštinė yra 4 arba $\sqrt{34}$. Analogiškai sprendžiami ir kiti punktai.

Atsakymas. a) 4 arba $\sqrt{34}$; b) $\sqrt{7}$ arba $\sqrt{11}$; c) $\sqrt{2}$ arba 2; d) 1 arba $\sqrt{11}$.

376. *Nurodymas.* Uždavinį sprendžiame pagal lentelėje pateiktą pavyzdį pasirinkę bet kuriuos natūraliuosius skaičius p.

377. Šiame uždavinyje pateikta dar viena taisyklė Pitagoro skaičių trejetams rasti.

a) $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$;
$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$.
Kadangi $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$, tai trikampis pagal atvirkštinę Pitagoro teoremą yra status.

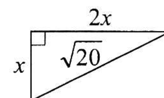
b) Pavyzdžiui, kai $x = 5$ ir $y = 3$, tai:
$x^2 - y^2 = 5^2 - 3^2 = 16$; $2xy = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$; $x^2 + y^2 = 5^2 + 3^2 = 34$.
Suradome Pitagoro skaičių trejetą 16, 30, 34. Iš tiesų, $34^2 = 16^2 + 30^2$.

378. *Nurodymas.* Atkreipkite dėmesį į b) punktą. Mokiniai, neatsižvelgę, kad $\sqrt{3} > 1$, gali klaidingai nurodyti atsakymą: $\sqrt{3}$. Galite pasiūlyti mokiniams pakoreguoti sąlygą taip, kad atsakymas būtų $\sqrt{3}$. (Tam tereikia vietomis sukeisti 1 ir $*$.)
a) 0,4; b) tokio skaičiaus nėra; c) $\sqrt{5}$; d) $\frac{4}{15}$.

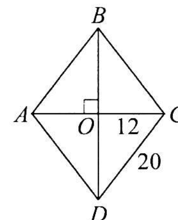
379. b) Reikia rasti Pitagoro trikampį, kurio perimetras lygus 30 vienetų. Toks trikampio kraštines atitinkantis skaičių trejetas nurodytas vadovėlio 113 p.: 5, 12, 13.
Įsmeigdami tris kuoliukus įtempiame virvę taip, kad susidarytų trikampis, kurio kraštinių ilgiai būtų 5, 12 ir 13. Kampas, esantis prieš ilgiausiąją kraštinę, bus status.

Galima paklausti mokinių, kiek virvėje bus surišta mazgelių.

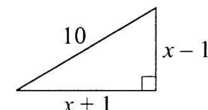
380. $P = 2(x + 2x) = 6x$.
Iš stačiojo trikampio pagal Pitagoro teoremą
$x^2 + (2x)^2 = (\sqrt{20})^2$, $x = 2$.
$P = 2 \cdot 6 = 12$.



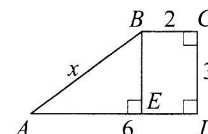
381. Iš stačiojo trikampio DOC taikydami Pitagoro teoremą gauname:
$DO^2 = DC^2 - OC^2 = 20^2 - 12^2 = 256$; $DO = 16$.
Kadangi rombo įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau, tai:
$AC = 2OC = 2 \cdot 12 = 24$; $BD = 2OD = 2 \cdot 16 = 32$.



382. Taikome Pitagoro teoremą: $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 10^2$, $x = 7$.
Trikampio statiniai yra: $x + 1 = 7 + 1 = 8$; $x - 1 = 7 - 1 = 6$.
Trikampio plotas $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$.



383. Brėžiame $BE \perp AD$. $ED = BC = 2$ — stačiakampio $BCDE$ priešingos kraštinės. $AE = AD - ED = 6 - 2 = 4$.
Iš stačiojo trikampio AEB pagal Pitagoro teoremą:
$AB^2 = BE^2 + AE^2$; $x = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 5 + 2 + 3 + 6 = 16$.
$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot CD = \frac{2+6}{2} \cdot 3 = 12$.
$AC^2 = AD^2 + CD^2$; $AC = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$.
$BD^2 = BC^2 + CD^2$; $BD = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.



384. Sūpuoklių lentos ilgis lygus: $2\sqrt{399^2 + 40^2} = 802\,(\text{cm}) \approx 8\,(\text{m})$.

385. a) $\frac{5}{8} \cdot (-3{,}62) - 1{,}18 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \cdot (-3{,}62 - 1{,}18) = \frac{5}{8} \cdot (-4{,}8) = -3$;
b) $28{,}3 + (-1{,}8 + 6) - (18{,}2 - 11{,}7) = (28{,}3 + 11{,}7) - (1{,}8 + 18{,}2) + 6 =$
$= 40 - 20 + 6 = 26$.

386. a) $(\sqrt{125} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = (5\sqrt{5} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot 5 = 20$;
b) $\sqrt{3} \cdot (5\sqrt{12} - 2\sqrt{48} + 2\sqrt{27}) - 20 = \sqrt{3}(10\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 6\sqrt{3}) - 20 =$
$= \sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} - 20 = 24 - 20 = 4$.

387. $3(x + y) - (x^2 - y^2) = 3(x + y) - (x - y)(x + y) = (x + y)(3 - (x - y)) =$
$= (x + y)(3 - x + y)$.
Atsakymas. **A**.

388. Sakykime, kad autobuso greitis yra x km/h. Tada traukinio greitis — $2x$ km/h.
Pagal sąlygą sudarome lygtį: $2x + 2 \cdot 2x = 240$, $x = 40$ km/h.
Atsakymas. 40 km/h.

389. Skritulio plotas $S = \pi r^2$. Pagal sąlygą $\pi r^2 = 28{,}26\,\text{dm}^2$; $r = 3$ dm.
Apskritimo ilgis $C = 2\pi r$; $C \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 = 18{,}84\,(\text{dm})$.

390. a) Iš viso sporto sekcijas lanko $2600 + 800 + 230 + 370 = 4000$ (studentų).
Išpjovos, vaizduojančios plaukimo sekciją lankančių studentų dalį, kampas bus lygus: $\frac{800 \cdot 360°}{4000} = 72°$.
b) 65%.

Vadovėlyje šio uždavinio numeris klaidingai parašytas 503.

4.3. Atstumas nuo taško iki tiesės. Trikampio nelygybė

Su statmens sąvoka susiduriama jau trečią kartą: 6 klasėje tiesė, statmena kitai tiesei, trumpiau buvo vadinama statmeniu tiesei; 7 klasėje trikampio aukštinę apibrėžėme kaip statmens atkarpą nuo trikampio viršūnės iki tiesės, kurioje yra priešinga trikampio kraštinė. Be to, 7 klasėje atstumą tarp lygiagrečių tiesių apibrėžėme kaip toms tiesėms statmenos atkarpos ilgį. Šiame skyrelyje kalbama apie iš taško į tiesę išvestą statmenį, pasvirąją ir pasvirosios projekciją toje tiesėje. Svarbu, kad mokiniai suvoktų, jog atstumas nuo taško iki tiesės yra lygus statmens tai tiesei ilgiui ir jis yra mažesnis už bet kurios pasvirosios ilgį. Taip pat svarbu, kad mokiniai šį faktą matytų stačiajame trikampyje (šiuo atveju vienas trikampio statinis atitinka tiesę, kitas statinis — statmenį, įžambinė — pasvirąją).
Svarbi pateiktoji trikampio nelygybės teorema. Būtina mokėti ją taikyti uždaviniams spręsti, o teoremos įrodymą prisiminti bent jau mokantis einamąją medžiagą.

Pakartoti:
Pitagoro teoremą;
statmens tiesei apibrėžimą;
trikampio aukštinės apibrėžimą.

Išmokti:
formuluoti ir taikyti uždaviniams spręsti šiuos teiginius:
— statmuo iš taško į tiesę yra trumpesnis už kiekvieną iš to taško nubrėžtą pasvirąją;
— stačiojo trikampio įžambinė yra ilgesnė už kiekvieną jo statinį;
— kiekviena trikampio kraštinė yra trumpesnė už kitų dviejų kraštinių sumą;
rasti atstumą tarp dviejų plokštumos taškų, kai žinomos tų taškų koordinatės (žr. 400 pratimą).

Šiame skyrelyje:

1. Iškeliamas probleminis klausimas: „Kada kelias nuo taško (atitinkančio namą) iki tiesės (atitinkančios plentą) bus trumpiausias?“ Nagrinėjant šią situaciją geometriškai įvedamos sąvokos: statmuo iš taško į tiesę, pasviroji iš taško į tiesę ir pasvirosios projekcija tiesėje. Padaroma išvada, kad statmens į tiesę ilgis yra mažesnis už kiekvienos pasvirosios į tą tiesę ilgį. Ši savybė suformuluojama stačiajam trikampiui:

Stačiojo trikampio įžambinė yra ilgesnė už kiekvieną jo statinį.

2. Pateikiama ir įrodoma trikampio nelygybės teorema:

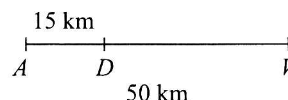
Kiekviena trikampio kraštinė yra trumpesnė už kitų dviejų kraštinių sumą.

3. Pateikiama užduotis skirta trijų taškų buvimo vienoje tiesėje sąlygai suvokti, t. y. jei atstumas tarp dviejų taškų lygus sumai atstumų nuo tų taškų iki bet kurio trečio taško, tai tie trys taškai yra vienoje tiesėje.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

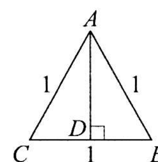
Teminiai uždaviniai: 391–404. Atkreipkite dėmesį į 400 uždavinio pavyzdyje išvestą atstumo tarp taškų $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ koordinatinę formulę.
405–410 uždaviniai yra kartojimo: laipsnių savybių taikymas (405), reiškinių su kvadratinėmis šaknimis pertvarkymas (406), tapatybės įrodymas (407), pagrindinės proporcijos savybės taikymas (408), procentų radimas (409), mastelis (410). 31–43

391. *Nurodymas.* Patartume uždavinio sąlygą pavaizduoti schema. Miestus atitinkančius taškus schemoje galima pažymėti miestų pavadinimų pirmosiomis raidėmis.
Atsakymas. Atstumas tarp Varėnos ir Daugų yra 35 km.

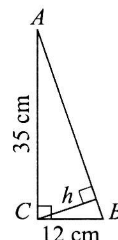


392. a) Kadangi $AC \neq AB + BC$, tai taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje;
b) kadangi $AB = AC + BC$, tai taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje.

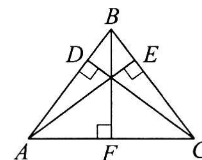
393. a) *Duota:* $\triangle ABC$, $AB = BC = CA = 1$, $AD \perp BC$.
Rasti: AD.
Sprendimas. Trikampio viršūnių atstumai iki prieš jas esančių kraštinių lygūs trikampio aukštinių ilgiams. Kadangi visos trys lygiakraščio trikampio aukštinės lygios, pakanka apskaičiuoti nubrėžtosios aukštinės AD ilgį.
Lygiakraščio trikampio aukštinė AD yra ir pusiaukraštinė, todėl $CD = DB = \frac{1}{2}$.
Iš stačiojo trikampio ADB pagal Pitagoro teoremą
$AD^2 = AB^2 - DB^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$; $AD = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



b) *Duota*: $\triangle ABC$ — status ($\angle C = 90°$), $AC = 35$ cm, $BC = 12$ cm, $h \perp AB$.
Rasti: h.
Sprendimas. Du ieškomi atstumai lygūs duotojo trikampio statinių ilgiams, t. y. 12 cm ir 35 cm. Lieka apskaičiuoti trikampio aukštinę h, kurios ilgis yra stačiojo kampo viršūnės atstumas iki trikampio įžambinės. Remdamiesi Pitagoro teorema pirmiausia apskaičiuojame duotojo trikampio įžambinę:
$AB = \sqrt{35^2 + 12^2} = 37$ (cm).
Sulyginę dviem būdais apskaičiuotą duotojo trikampio plotą gauname:
$\frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 37 \cdot h$, $h = \frac{35 \cdot 12}{37} = 11\frac{13}{37}$ (cm).

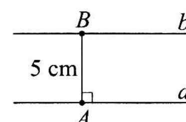


c) *Duota*: $\triangle ABC$, $AB = BC = 5$, $AC = 6$, $AE \perp BC$, $BF \perp AC$, $CD \perp AB$.
Rasti: AE, BF, CD.
Sprendimas. $AF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$. Remdamiesi Pitagoro teorema randame $BF = 4$.
$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$. $CD = AE = \frac{2S}{AB} = \frac{2 \cdot 12}{5} = 4{,}8$.

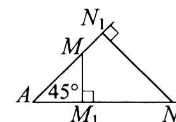


394. Šis uždavinys sprendžiamas naudojantis įvairiais brėžimo įrankiais: matlankiu, skriestuvu, liniuote. Pakanka per tašką A nubrėžti tiesę l, lygiagrečią tiesei BC. Atstumas tarp lygiagrečių tiesių yra jų bendras statmuo ir lygus trikampio aukštinei, nubrėžtai iš viršūnės A.

395. 1) Nubrėžiame tiesę a ir joje pažymime tašką A.
2) Iš taško A iškeliame 5 cm ilgio statmenį AB.
3) Per tašką B brėžiame tiesę b, lygiagrečią tiesei a.



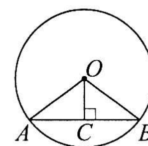
396. *Duota*: $\angle A = 45°$, $AM = 1$ cm, $AN = 2$ cm, $MM_1 \perp AN$, $NN_1 \perp AM$.
Rasti: MM_1, NN_1.
Sprendimas. Statusis trikampis, kurio vienas kampas lygus 45°, yra lygiašonis.
Pažymėkime: $MM_1 = AM_1 = x$ cm ir $NN_1 = AN_1 = y$ cm.
Remdamiesi Pitagoro teorema gauname:



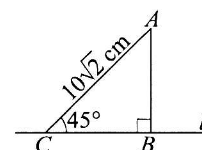
$x^2 + x^2 = AM^2$, ir $y^2 + y^2 = AN^2$,
$2x^2 = 1$, $2y^2 = 4$,
$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (cm), $y = \sqrt{2}$ (cm).

397. a) ir c) — negalima, nes viena trikampio kraštinė negali būti lygi kitų dviejų kraštinių sumai.
b) Jeigu ilgiausioji (ar viena iš ilgiausiųjų) kraštinė lygi $\frac{1}{3}p$, tai kitos dvi irgi lygios $\frac{1}{3}p$ (kitaip perimetras būtų mažesnis už p). Taigi reikia lankstyti lygiakraštį trikampį.
d) Galima — remiantis teorema, atvirkštine trikampio nelygybės teoremai: jei turime tris atkarpas a, b, c (iš kurių a yra ilgiausia), tenkinančias nelygybę $a < b + c$, tai iš jų galima sudaryti trikampį (čia $a = 2x$, $b = 2x$, $c = x$).

398. Trikampis AOB yra lygiašonis, nes $OA = OB = 10$ cm. Jo aukštinė $OC = 6$ cm. Iš stačiojo trikampio ACO remdamiesi Pitagoro teorema randame: $AC = \sqrt{AO^2 - OC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (cm). Lygiašonio trikampio aukštinė OC yra ir pusiaukraštinė, todėl $AB = 2AC = 2 \cdot 8 = 16$ (cm).



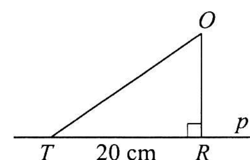
399. *Duota*: $AC = 10\sqrt{2}$ cm, $AB \perp l$, $\angle C = 45°$.
Rasti: BC.
Sprendimas. Kadangi $\angle A = \angle C = 45°$, tai $\triangle ABC$ — lygiašonis; $AB = BC$.
Taikome Pitagoro teoremą:
$AB^2 + BC^2 = AC^2$, $2BC^2 = AC^2$, $BC^2 = 100$, $BC = 10$ cm.



400. $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 - (-3))^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{58}$.

Būtinai išspręskite šį uždavinį.

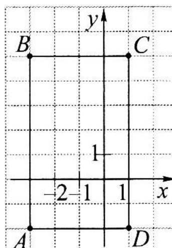
401. Tegul $OR = x$ cm, tuomet $OT = 2x$ cm. Taikome Pitagoro teoremą:
$OT^2 = OR^2 + RT^2$, $(2x)^2 = x^2 + 20^2$, $3x^2 = 400$, $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.
$OT = 2 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ (cm).



402. $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$;
$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8}$;
$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$.
$AB^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$; $BC^2 = (\sqrt{8})^2 = 8$; $AC^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$.
Kadangi $AC^2 = AB^2 + BC^2$, tai $\triangle ABC$ yra status.

403. $AB = \sqrt{(-5-(-1))^2 + (-1-(-1))^2} = 4$;
$BC = \sqrt{(-3-(-5))^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{13}$;
$AC = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{13}$;
$AB^2 = 16$; $BC^2 = AC^2 = 13$; $16 \neq 13 + 13$.
Atsakymas. Trikampis nėra status, bet yra lygiašonis.

404. $AB = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (5-(-2))^2} = 7$;
$BC = \sqrt{(1-(-3))^2 + (5-5)^2} = 4$;
$CD = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-5)^2} = 7$;
$AD = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-2-(-2))^2} = 4$.
Keturkampis $ABCD$ yra stačiakampis.
Jo perimetras $P = 2 \cdot (7+4) = 22$, o plotas
$S = 4 \cdot 7 = 28$.



Nusibraižę brėžinį matome, kad keturkampis yra stačiakampis, todėl jo kraštinių ilgius galime rasti ir netaikydami atstumo tarp dviejų taškų formulės.

405. a) 25; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{1}{64}$.

406. a) $5\sqrt{2} - \sqrt{18} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;
b) $10\sqrt{3} - 4\sqrt{48} - \sqrt{75} = 10\sqrt{3} - 16\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -11\sqrt{3}$.

407. a) $(x-3)(x+4) = x^2 - 3x + 4x - 12 = x^2 + x - 12 = x(x+1) - 12$;
b) $(a+2)(a-4) = a^2 + 2a - 4a - 8 = a^2 - 2a - 8 = a(a-2) - 8$.

408. a) $1\frac{1}{5}$; b) 1,3.

409. *I būdas.* Sakykime, kad iš pradžių žmogus turėjo x Lt. Vienoje parduotuvėje jis išleido $0{,}4x$ Lt, o liko jam $x - 0{,}4x = 0{,}6x$ (Lt). Antroje parduotuvėje jis išleido $0{,}3 \cdot 0{,}6x = 0{,}18x$ (Lt). Tada jam dar liko $0{,}6x - 0{,}18x = 0{,}42x$ (Lt), o tai pagal sąlygą yra 105 Lt. Sudarome lygtį: $0{,}42x = 105$, $x = 250$ Lt.
II būdas. 1) Kiek pinigų liko žmogui išėjus iš pirmos parduotuvės?

$$\begin{matrix} 105\,\text{Lt} — 70\% \\ y\,\text{Lt} — 100\% \end{matrix} \longrightarrow y = 150\,(\text{Lt}).$$

2) Kiek pinigų žmogus turėjo iš pradžių?

$$\begin{matrix} 150\,\text{Lt} — 60\% \\ x\,\text{Lt} — 100\% \end{matrix} \longrightarrow x = 250\,(\text{Lt}).$$

Atsakymas. Žmogus iš pradžių turėjo 250 Lt.

Patarkite moksleiviams pasitikrinti ir tik po to rašyti atsakymą.

410. a) 88 km = 88 000 m = 88 000 000 mm; 220 : 88 000 000 = 1 : 400 000. Žemėlapio mastelis yra 1 : 400 000.
b) Tikrasis sklypo plotas lygus $4 \cdot 10\,000^2\,\text{cm}^2 = 40\,000\,\text{m}^2 = 4$ ha.
c) 1 cm žemėlapyje atitinka 2 km vietovėje, tai $1\,\text{cm}^2$ žemėlapyje atitinka $4\,\text{km}^2$ vietovėje. Vadinasi, $5\,\text{cm}^2$ žemėlapyje atitinka $4 \cdot 5 = 20\,(\text{km}^2)$ vietovėje.

5. ERDVINIAI KŪNAI

Su erdviniais kūnais — briaunainiais ir sukiniais — mokiniai susipažino jau 5 ir 6 klasėse: mokėsi juos atpažinti, nurodyti, kurių briaunainių yra pavaizduotosios išklotinės, skaičiavo kubo, stačiakampio gretasienio paviršiaus plotą ir tūrį. 7 klasėje buvo apibrėžta stačioji prizmė, mokoma skaičiuoti jos paviršiaus plotą ir tūrį, įvesti sutartiniai žymėjimai S_{pagr}, $S_{šon}$, S_{pav}, kurie vartojami ir 8 klasėje. Šiame skyriuje plačiau supažindinama su piramide ir ritiniu.

Naudojantis dviem kampainiais aiškinama labai svarbi piramidės aukštinės sąvoka. Taikant Pitagoro teoremą sprendžiami uždaviniai, susiję su piramide. Skaičiuojamas ritinio šoninio ir viso paviršiaus plotas, tūris. 9 klasėje bus toliau nagrinėjama piramidė: skaičiuojamas piramidės šoninio ir viso paviršiaus plotas, tūris. Taip pat bus toliau nagrinėjami sukiniai: kūgis, sfera, rutulys.

Pastaba. Patariame mokytojams ir mokiniams naudotis Mildos Vosylienės vadovėliu „Geometrija 10", TEV, Vilnius 1999, 42–46, 51–54 p.

5.1. Piramidė

Skyrelyje toliau plečiamos žinios apie piramidę. Žemesnėse klasėse daugiausia buvo nagrinėjami modeliai, o dabar jau mokoma braižyti piramidę, teisingai pavaizduoti nematomas linijas, sužymėti raides. Daug dėmesio skiriama skaičiavimo uždaviniams pagal pateiktus brėžinius. Patiems moksleiviams pagal uždavinio sąlygą nusibraižyti brėžinį, teisingai į pagrindą išvesti aukštinę ir išsiaiškinti, į kurį pagrindo tašką ji pataiko, dar būtų sunku, todėl dauguma brėžinių yra pateikti.

Svarbiausia šiame skyrelyje — išmokyti apskaičiuoti piramidės aukštinės, briaunų ar šoninės sienos aukštinės ilgius remiantis Pitagoro teorema, trikampio ploto formule bei nagrinėtų keturkampių savybėmis.

Pastaba. Nors skyrelyje nenagrinėjamas nei piramidės paviršiaus plotas, nei tūris, gabesniems mokiniams galima pateikti nesudėtingų uždavinių piramidės paviršiaus plotui ir tūriui rasti.

Pakartoti:

briaunainio, jo sienos, pagrindo, briaunos, viršūnės sąvokas;
ploto matavimo vienetus;
trikampio ploto formulę;
Pitagoro teoremą.

Išmokti:

piramidės apibrėžimą;
atpažinti piramidės elementus: pagrindą, šonines sienas, šonines briaunas;
mokėti nubrėžti, atpažinti brėžinyje pavaizduotą piramidės aukštinę;
vaizduoti piramides;
taikyti Pitagoro teoremą skaičiuojant erdvinių kūnų elementus.

Šiame skyrelyje:

1. Mokoma nubraižyti penkiakampę piramidę, ją žymėti raidėmis (pirmoji raidė žymi piramidės viršūnę), atpažinti piramidės pagrindą, šonines sienas, šonines briaunas.
2. Pateikiamas piramidės apibrėžimas:

   Briaunainis, kurio viena siena yra bet koks daugiakampis, o kitos sienos — trikampiai, turintys bendrą viršūnę, vadinamas piramide.

3. Pavaizduota trikampė, keturkampė, penkiakampė ir šešiakampė piramidės.

   Pagal ką įvardijama piramidės rūšis, prašoma atsakyti pačių mokinių. Tai aiškiai pailiustruota ir brėžinyje: jei piramidės pagrindas — trikampis, tai piramidė trikampė, jei keturkampis — keturkampė ir t. t.

4. Aiškinama, kas yra piramidės aukštinė. Tačiau tikslaus apibrėžimo nepateikiama, todėl nereikėtų reikalauti jo ir iš mokinių. Labai svarbu, kad mokiniai mokėtų aukštines atpažinti brėžinyje ir nusibrėžti, kai jų nėra.

   Pastaba. Galima neapsiriboti vadovėlyje pateiktu piramidės aukštinės sąvokos aiškinimu. Mokiniams galima pasakyti, kad tai statmuo nuo piramidės viršūnės iki pagrindo (analogiškai kaip trikampio aukštinė), paaiškinti, kad aukštinės ilgis lygus atstumui nuo piramidės viršūnės iki pagrindo (analogiškai kaip atstumas nuo taško iki tiesės).

5. Išnagrinėtas uždavinys piramidės aukštinei rasti.

   Pastaba. Reikėtų atkreipti mokinių dėmesį, kad braižant piramidę, kurios pagrindas kvadratas, šis kvadratas vaizduojamas lygiagretainiu. Lygiagretainio smailusis kampas lygus 45°, o trumpesnioji kraštinė lygi pusei ilgesniosios.

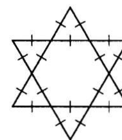
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

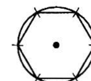
Šiame skyrelyje teminiai uždaviniai yra 411–421. Svarbu, kad mokiniai sugebėtų iš visokių erdvinių kūnų išskirti piramides (411), išmoktų nupiešti piramidės išklotinę (412) bei nurodyti piramidės elementus (413). Kiti uždaviniai (422–430) yra kartojimo: 422 ir 429 skirti Pitagoro teoremai (tiesioginei ir atvirkštinei) taikyti, 424 — laipsnių, o 425 — kvadratinės šaknies savybėms pakartoti. Be to, verta prisiminti palūkanų normą (426), pagrindinę trupmenos savybę (427), magiškąjį kvadratą (428). 423 — galima skirti mokinių savarankiškam darbui.

1–13, 26

411. Piramidės yra c) ir d).

412. Išklotinė pavaizduota brėžinyje. Galima braižyti ir taip: skriestuvu nubrėžkite apskritimą ir nekeisdami atstumo tarp jo kojelių padalykite apskritimą į 6 lygias dalis. Apskritimo dalijimo taškus sujungę atkarpomis gausite šešiakampį, kurio kraštinės yra lygios. Prie kiekvienos kraštinės nubraižykite po lygiakraštį trikampį.





Pastaba. Deja, iš tokios išklotinės piramidės sulankstyti neįmanoma: jeigu bandysime trikampius lenkti į vidų, kol viršūnė pasidarys bendra, paaiškės, kad ji sutampa su apskritimo centru. Todėl galima pakoreguoti sąlygą: „šoninės sienos yra *lygiašoniai* trikampiai“. Iš pateikto paaiškinimo matyti, kad tų lygiašonių trikampių šonai turi būti ilgesni už pagrindus.

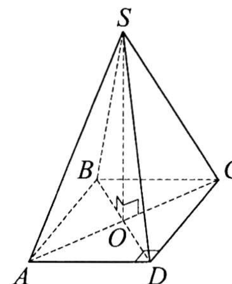
413. Uždavinys skirtas mokinių savarankiškam darbui. Nubraižyta piramidė turės:
a) 5 sienas; b) 8 briaunas; c) 4 šonines sienas; d) 4 šonines briaunas;
e) 4 pagrindo kraštines.

414. Trikampis AOS yra status ($\angle AOS = 90°$). Taikome Pitagoro teoremą:
$SA^2 = AO^2 + SO^2$; $AO = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (cm). Kvadrato įstrižainės yra lygios ir susikirsdamos dalija viena kitą pusiau, todėl:
$BD = AC = 2AO = 2 \cdot 12 = 24$ (cm).

415. Trikampis ADC yra status. Taikome Pitagoro teoremą:
$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$; $AC = 10$.
Stačiakampio $ABCD$ įstrižainės yra lygios ir susikirsdamos dalija viena kitą pusiau, todėl $OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$.
Trikampis SOD yra status. Taikome Pitagoro teoremą:
$SD^2 = SO^2 + OD^2 = 12^2 + 5^2 = 169$; $SD = 13$.

416. *Nurodymas.* Atkreipkite mokinių dėmesį, kad nurodant, kas duota, neparašyta, kad trikampis ACB yra status. Tik brėžinyje pažymėta, kad $AC \perp BC$.
Iš stačiojo trikampio ACB pagal Pitagoro teoremą $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Kadangi $AC = BC$, tai $2AC^2 = AB^2$, $AC = \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = \sqrt{\frac{15^2}{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$.
Duota, kad $SC = AC$, tai $SC = \frac{15\sqrt{2}}{2}$. $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AC^2 =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{15^2}{2} = 56{,}25$.

417. *Duota*: $SABCD$ — piramidė, $ABCD$ — stačiakampis, O — įstrižainių susikirtimo taškas, SO — piramidės aukštinė.
Įrodyti: $SA = SB = SC = SD$.
Įrodymas. Įrodysime, kad $\triangle SOA = \triangle SOB = \triangle SOC = \triangle SOD$.
$AO = BO = CO = DO$ — stačiakampio įstrižainės yra lygios ir susikirsdamos dalija viena kitą pusiau. $\angle SOA = \angle SOB = \angle SOC = \angle SOD = 90°$, nes $SO \perp AC$ ir $SO \perp BD$. SO — bendras visų keturių trikampių statinis. Vadinasi, trikampiai yra lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Todėl $SA = SB = SC = SD$.

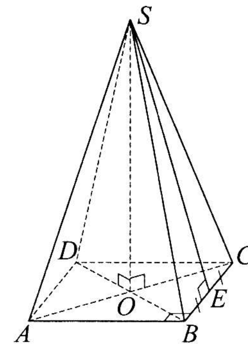


418. Iš stačiojo trikampio ADC taikydami Pitagoro teoremą gauname: $AC^2 =$
$= AD^2 + DC^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \cdot 16$; $AC = 4\sqrt{2}$. Kvadrato įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau, todėl $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Iš stačiojo trikampio SOA gauname: $SA^2 = SO^2 + AO^2$; $SO^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2 = 28$; $SO = 2\sqrt{7}$.

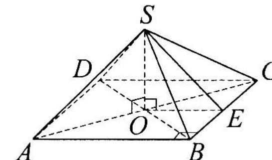
418 ir 420 pratimų vadovėlyje esantys brėžiniai ne visai tikslūs. Su mokiniais aptarkite padarytas vaizdavimo klaidas (žr. pastabą teorinės dalies pabaigoje).

419. Iš stačiojo trikampio ADC pagal Pitagoro teoremą $AC^2 = AD^2 + DC^2 =$
$= 4^2 + 3^2 = 25$, $AC = 5$. $S_{\triangle SAC} = \frac{1}{2}AC \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$.

420. Iš stačiojo trikampio ABC pagal Pitagoro teoremą $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 10^2 + 10^2 = 2 \cdot 100$, $AC = 10\sqrt{2}$ cm.
Kvadrato įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau, todėl $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ (cm).
Iš stačiojo trikampio SOA:
$SA^2 = SO^2 + AO^2$; $SO^2 = 15^2 - (5\sqrt{2})^2 = 175$, $SO = 5\sqrt{7}$ cm.
$SA = SB = SC = SD = 15$ cm — lygių stačiųjų trikampių SOA, SOB, SOC, SOD įžambinės (žr. 417 uždavinį). $BE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (cm).
Iš stačiojo trikampio SEB:
$SB^2 = SE^2 + BE^2$; $SE^2 = 15^2 - 5^2 = 200$, $SE = 10\sqrt{2}$ cm.
$S_{\triangle BSC} = \frac{1}{2}BC \cdot SE = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$ (cm^2).



421. Pavaizduokime Cheopso piramidę brėžiniu.
Piramidės pagrindas yra kvadratas $ABCD$, kurio kraštinės ilgis apytiksliai lygus $AB \approx \sqrt{50\,176} = 224$ (m). $OE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 224 = 112$ (m).
Iš stačiojo trikampio SOE pagal Pitagoro teoremą:
$SE^2 = SO^2 + OE^2$; $SO^2 = 185^2 - 112^2 = 21\,681$, $SO = \sqrt{21\,681} \approx 147$ (m).



422. a) $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, $BD = 10$ cm;
b) $BD_1^2 = BD^2 + DD_1^2 = 10^2 + 4^2 = 116$, $BD_1 = 2\sqrt{29}$ cm.

423. *Pavyzdys.* Tarkime, kad mokinio ūgis yra 164 cm. Išreiškę jį pėdomis gauname: $164 : 30{,}5 \approx 5{,}4$ (pėdos). Vadinasi, masės apskaičiavimo taisyklę taikyti galima. Mokinio ūgis coliais bus lygus $164 : 2{,}54 \approx 64{,}6$ (colių). Tada masė svarais lygi $m \approx \frac{11}{2}(64{,}6 - 60) + 110 = 135{,}3$ (svarų).
Mokinio masė kilogramais apytiksliai lygi $135{,}3 \cdot 0{,}454 \approx 61{,}4$ (kg).

424. a) $\frac{2}{3}$; b) $1\frac{7}{18}$.

425. a) $2\sqrt{3} + \sqrt{2}$; b) $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$; c) $2\sqrt{6}$; d) $\sqrt{6}$; e) 14; f) $14 + 4\sqrt{6}$.

426. a) $\begin{matrix} 450\text{ Lt} - 3{,}6\% \\ x\text{ Lt} - 100\% \end{matrix} \longrightarrow x = \dfrac{450 \cdot 100}{3{,}6} = 12\,500$ (Lt);

b) $\begin{matrix} 2000\text{ Lt} - 5\% \\ x\text{ Lt} - 100\% \end{matrix} \longrightarrow x = \dfrac{2000 \cdot 100}{5} = 40\,000$ (Lt).

427. a) *I būdas.* $\frac{5}{13} = \frac{65}{x}$, $x = 169$; $\frac{5}{13} = \frac{65}{169}$.
II būdas. Skaitiklis padidėjo $65 : 5 = 13$ (kartų), tai ir vardiklį reikia padidinti 13 kartų, t. y. $13 \cdot 13 = 169$; $\frac{5}{13} = \frac{65}{169}$.
b) $\frac{5}{13} = \frac{5 \cdot 26}{13 \cdot 26} = \frac{130}{338}$.

428. Pažymėkime tuščiuosius langelius raidėmis A, B, C, D, E.
1) $-10 - 7 = \text{B} - 9$, nes trečiasis įstrižainės skaičių sumos ir trečio stulpelio skaičių sumos dėmuo yra tas pats E; $\text{B} = -8$.
2) $-10 + \text{C} = -7 - 8$, nes trečiasis dėmuo yra tas pats D; $\text{C} = -5$.
3) $-10 - 5 = -11 + \text{E}$, nes trečiasis dėmuo yra tas pats D; $\text{E} = -4$.
4) $\text{D} - 11 = -8 - 9$, nes trečiasis dėmuo yra tas pats $\text{E} = -4$; $\text{D} = -6$.
5) $\text{A} - 8 = -5 - 6$, nes trečiasis dėmuo yra tas pats -10; $A = -3$.
6) Būtinai patikriname, ar gautasis kvadratas magiškasis.

−10	A	B
C	−7	−9
D	−11	E

−10	−3	−8
−5	−7	−9
−6	−11	−4

Iš sprendimo matome, kad sąlygos žodžiai „sveikaisiais skaičiais −3, −4, −5, −6, −8“ nebūtini.

429. a) Trečioji trikampio kraštinė lygi $12 - (4+3) = 5$ (cm). Kadangi $5^2 = 4^2 + 3^2$, tai pagal atvirkštinę Pitagoro teoremą trikampis yra status.
b) Trikampio plotas lygus statinių sandaugos pusei, t. y. $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ (cm^2).

430. Yra 4 žodžiai, ir reikia nustatyti, kiek iš jų galima sudaryti skirtingų keturžodžių eilučių, kuriose žodžiai nesikartoja. Į pirmą vietą eilutėje galima rašyti bet kurį iš 4 žodžių — 4 būdai. Į antrą vietą kiekvienu atveju galima rašyti bet kurį iš 3 likusių žodžių — 3 būdai. Į trečią vietą kiekvienu atveju galima rašyti bet kurį iš 2 likusių žodžių — 2 būdai. Ketvirtam žodžiui lieka vienintelė vieta — 1 būdas. Remiantis daugybos taisykle galima sudaryti $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ skirtingas eilutes.
Taigi Juliaus eilėraštyje galėjo būti daugiausia 24 eilutės.

Daugybos taisyklė bus nagrinėjama 9 klasėje.

5.2. Sukiniai. Ritinys

Su sukinio ir sukimosi ašies sąvokomis moksleiviai pirmą kartą susipažino 6 klasėje. Buvo paaiškinta, kokią figūrą ir kaip reikia sukti norint gauti kūgį, ritinį, rutulį. Šiame skyrelyje nagrinėjamas ritinys: vaizduojama jo išklotinė, skaičiuojamas viso ir šoninio paviršiaus plotas ir tūris. Kūgis ir rutulys bus nagrinėjami 9 klasėje.

Pakartoti:

sukinių pavadinimus ir jų gavimą;
stačiosios prizmės apibrėžimą ir jos tūrio formulę;
apskritimo ilgio ir skritulio ploto formules.

Išmokti:

sukinio sąvoką;
paaiškinti ritinio, kaip sukinio, gavimą;
apibūdinti sąvokas: ritinio pagrindas, pagrindo spindulys, aukštinė, šoninis paviršius, visas paviršius;
apskaičiuoti ritinio šoninio paviršiaus plotą, viso paviršiaus plotą, tūrį.

Šiame skyrelyje:

1. Erdviniai kūnai, kuriuos gauname sukdami plokštumos figūrą apie pasirinktą tiesę, pavadinami sukiniais, o pasirinktoji tiesė — sukimosi ašimi. Sukinių pavyzdžiais nurodomi kūgis, rutulys ir ritinys.
2. Pateikta 1 užduotis, prašanti pavaizduoti, kokius geometrinius kūnus gautume sukdami apie nubrėžtą tiesę statųjį trikampį, skritulį, skritulio ketvirtadalį ir stačiakampį. Prieš atliekant užduotį reikėtų aptarti, kokie tai bus kūnai, ir tada mokiniai turėtų savarankiškai bandyti tuos kūnus pavaizduoti.
3. Iš 1 užduotyje gautų geometrinių kūnų toliau nagrinėjamas ritinys aiškinantis visas su juo susijusias sąvokas. Iš jų labiausiai reikėtų akcentuoti ritinio aukštinę ir pagrindo spindulį. Tuo tikslu pateikta ir 2 užduotis.
4. Pavaizdavus ritinio išklotinę pateikiama 3 užduotis savarankiškai parašyti formules $S_{šon} = 2\pi rh$ ir $S_{pav} = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Nebūtina reikalauti, kad mokiniai šias formules atsimintų. Kur kas svarbiau, kad mokiniai jas suvoktų.
5. Teigiama, kad ritinio tūris apskaičiuojamas panašiai kaip ir stačiosios prizmės tūris, t. y. pagrindo plotas dauginamas iš aukštinės. Iš formulės $V = Sh$ parašoma ritinio, kurio pagrindo spindulys r, o aukštinė h, tūrio formulė $V = \pi r^2 h$. Šią formulę jau vertėtų įsiminti.
6. Išspręstas ritinio pagrindo, šoninio bei viso paviršiaus plotų ir tūrio skaičiavimo uždavinys.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 431–441 uždaviniai. Kiti uždaviniai (išskyrus 451) kartojimo: Pitagoro teoremos taikymas kūgiui (442), veiksmai su teigiamaisiais ir neigiamaisiais skaičiais ir dešimtainėmis trupmenomis (443), judėjimas upe (444), skaičių pažymėjimas skaičių ašyje (445), skaičiavimai pagal kelio formulę $s = v \cdot t$ (446), atskliautimas ir panašių narių sutraukimas (448). 451 yra naujas brėžimo su skriestuvu ir liniuote uždavinys, reikalingas toliau mokantis geometrijos. 14–25

431. a) $h = 10\,\text{cm}$, $r = 8\,\text{cm}$; b) $h = 16\,\text{cm}$, $r = 6\,\text{cm}$; c) $h = 5\,\text{cm}$, $r = 10\,\text{cm}$. Spręsti mintinai.

432. a) 8π cm; b) $10{,}4\pi$ cm; c) $4\frac{2}{11}\pi$ dm.

433. Dėžutei surišti sunaudota $30 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 35 = 315$ (cm) $= 3{,}15$ (m) juostelės.

434. a) Skardos lakšto ilgis lygus $2\pi r$. Kadangi $2r = 4$ dm, tai $2\pi r = 4\pi \approx$ $\approx 3{,}14 \cdot 4 = 12{,}56$ (dm);
b) $2\pi r = 5\pi \approx 3{,}14 \cdot 5 = 15{,}7$ (dm).
Pastaba. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad spręsdami nepaisėme skardos lakšto pločio. Verta pasidomėti, ar negalima susukti norimo vamzdžio pagrindo apskritimo ilgiu imant skardos lakšto plotį (6 dm). Tačiau nei 4π, nei 5π nėra lygu 6.

435. Vamzdelio ilgis lygus ritinio aukštinei. Pirmojo vamzdelio ilgis lygus 21 cm, o antrojo — 29,7 cm. Taikome formulę $C = 2\pi r$. Pirmojo vamzdelio pagrindo skersmuo $2r = \frac{C}{\pi} \approx \frac{29{,}7}{3{,}14} \approx 9{,}5$ (cm). Antrojo vamzdelio pagrindo skersmuo $2r \approx \frac{21}{3{,}14} \approx 6{,}7$ (cm).

436. a) $S_{pav} = S_{šon} + 2S_{pagr} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 4(6 + 4) = 80\pi$;
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 96\pi$;
b) $S_{pav} = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 5(4 + 5) = 90\pi$ (cm^2);
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 = 100\pi$ (cm^3);
c) $S_{pav} = 2\pi r(h + r) = 2\pi \cdot 2(4{,}5 + 2) = 26\pi$ (cm^2);
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4{,}5 = 18\pi$ (cm^3).

437. a) $S_{pagr} = 16\pi$ cm^2; b) $S_{šon} = 120\pi$ cm^2; c) $S_{pav} = 152\pi$ cm^2;
d) $V = 240\pi$ cm^3.

438. $S_{šon} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 0,1 \cdot 10 = 2\pi \approx 2 \cdot 3,14 = 6,28\,(\text{m}^2)$.
$S_{šon} + 0,1 \cdot S_{šon} \approx 6,28 + 0,628 = 6,908\,(\text{m}^2)$. Trijų skardos lakštų plotas lygus $2,3 \cdot 3 = 6,9\,(\text{m}^2)$. Kadangi $6,908\,\text{m}^2 > 6,9\,\text{m}^2$, tai galime teigti, kad trijų skardos lakštų vamzdžiui pagaminti neužteks.
Pastaba. Skaičiai 6,908 ir 6,9 skiriasi pernelyg mažai, kad galima būtų daryti tokią kategorišką išvadą — na, pavyzdžiui, jei pavyktų pasiekti, kad atliekų nebus (o iš kur tos atliekos?), tai vamzdis išeitų. Be to, ir skaičiuoti reikėtų atsargiau, su griežtomis nelygybėmis, kadangi $\pi > 3,14$, tai $1,1 S_{šon} = 2,2\pi >$ $> 6,908$. Todėl sąlygoje būtų geriau imti ne 2,3, o 2,2.

439. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1,5^2 \cdot 3 = 6,75\pi \approx 6,75 \cdot 3,14 = 21,195\,(\text{dm}^3) \approx 21\,(\ell)$. Kadangi $20 < 21$, tai galime teigti, kad vanduo į ritinio formos kibirą tilps.

Kadangi $1\,\ell = 1\,\text{dm}^3$, tai sąlygoje duotus vienetus centimetrais pavertėme decimetrais.

440. a) $C = 62,8\,\text{cm}$; $S = 314\,\text{cm}^2$; b) $C = 26,376\,\text{cm}$; $S = 55,3896\,\text{cm}^2$;
c) $C = 8,792\,\text{dm}$; $S = 6,1544\,\text{dm}^2$.

441.

	Spindulys	Aukštinė	Šoninis paviršius	Visas paviršius	Tūris
a)	2	6	24π	32π	24π
b)	3	7	42π	60π	63π
c)	6	10	120π	192π	360π
d)	2	8	32π	40π	32π

a) $S_{šon} = 2\pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi$; $S_{pav} = 2\pi r^2 + 24\pi = 2\pi \cdot 2^2 + 24\pi = 32\pi$;
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi$;
b) $2\pi rh = 42\pi$, $r = \frac{42\pi}{2\pi \cdot 7} = 3$; $S_{pav} = 2\pi \cdot 3^2 + 42\pi = 60\pi$;
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 7 = 63\pi$;
c) $\pi r^2 h = 360\pi$, $h = \frac{360\pi}{\pi \cdot 6^2} = 10$; $S_{šon} = 2\pi \cdot 6 \cdot 10 = 120\pi$;
$S_{pav} = 2\pi \cdot 6^2 + 120\pi = 192\pi$;
d) $\pi r^2 h = 32\pi$, $r^2 = \frac{32\pi}{8\pi} = 4$, $r = 2$, nes $r > 0$; $S_{šon} = 2\pi \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi$;
$S_{pav} = 2\pi \cdot 2^2 + 32\pi = 40\pi$.

442. Skaičiuojame taikydami Pitagoro teoremą:
a) $r^2 = 13^2 - 12^2 = 25$; $S_{pagr} = \pi r^2 = \pi \cdot 25 = 25\pi$;
b) $r^2 = 17^2 - 15^2 = 64$; $S_{pagr} = \pi r^2 = \pi \cdot 64 = 64\pi$;
c) $r^2 = 30^2 - 24^2 = 324$; $S_{pagr} = \pi r^2 = \pi \cdot 324 = 324\pi$.

443. a) $-32,23$; b) $48,66$; c) $-4,68$; d) $-3,41$.

444. *I būdas.* Upės srovės greitis lygus $(18,6 - 14,2) : 2 = 2,2$ (km/h). Katerio savasis greitis lygus $18,6 - 2,2 = 16,4$ (km/h).
II būdas. Katerio greitis lygus $(18,6 + 14,2) : 2 = 16,4$ (km/h). Upės srovės greitis lygus $18,6 - 16,4 = 2,2$ (km/h).

445.
a) −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 — $-4; -3; -2; -1; 0; 1$;
b) −4 −3 −2 −1 0 1 2 — $\frac{1}{-0,5} = -2$;
c) 0,5; −2 −1 0 1 2 — $-(-0,5) = 0,5$;
d) −2 −1 0 1 2 — -1 — didžiausias sveikasis neigiamasis skaičius;
e) −2,5; 2,5; −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 x — $|x| = 2,5$,
$x = -2,5$ arba $x = 2,5$.

446.

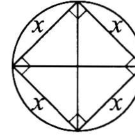
s	288 km	105 km	28 km	120 m	1000 m
v	90 km/h	30 km/h	7 km/h	10 m/s	40 m/min
t	3,2 h	3,5 h	4 h	12 s	25 min

447. a) $x = 6$; b) $t = 2$; c) $y = -4$ arba $y = 3$; d) $m = -4$ arba $m = 5$;
e) $n = 0$; f) sprendinių nėra; g) $x = 4$; h) $x = -\sqrt{5}$ arba $x = \sqrt{5}$;
i) $x = -7$ arba $x = 7$.

448. a) $14 - 2a$; b) $8x - 14y$; c) $-10m - 8n$; d) $42x - 97y$; e) $n + 1$;
f) $9 - 4n^2$.

449. a) Sudarome lygtį: $7x + 2x + 2x = 220$, $x = 20$; $2x = 20 \cdot 2 = 40$ (kg).
b) Sudarome lygtį: $25x + 9x + 5x = 780$, $x = 20$; $9x = 20 \cdot 9 = 180$ (kg).
Atsakymas. a) 40 kg; b) 180 kg.

450. Tarkime, kad išpjovėme didžiausią įmanomą kvadratą, tada jo įstrižainė lygi skritulio skersmeniui, t. y. 197 cm. Sakykime, kad to kvadrato kraštinė lygi x cm. Pagal Pitagoro teoremą: $x^2 + x^2 = 197^2$, $x^2 = 19404{,}5$. Vadinasi, didžiausio įmanomo išpjauti kvadrato plotas yra 19404,5. Kadangi norimo kvadrato plotas lygus $140^2 = 19\,600$, tai tokio kvadrato išpjauti negalima.



Pastaba. Taikomasis uždavinio pobūdis nevykęs. Daug geriau būtų uždavinį formuluoti taip (ir tai skaičiai netikę): „Skritulio skersmuo lygus 19,7 cm. Ar galima juo uždengti kvadratą, kurio kraštinė lygi 14 cm?“

451. a) Brėžimo etapai:
1) brėžiame apskritimą, kurio centras yra duotasis taškas O, parinkę tokį spindulį, kad apskritimas duotąją tiesę a kirstų dviejuose taškuose A ir B;
2) tuo pačiu spinduliu brėžiame dar du apskritimus, kurių centrai yra taškai A ir B;
3) kitą tų dviejų apskritimų susikirtimo tašką pažymėję raide O_1 brėžiame tiesę per taškus O ir O_1.
Gavome $OO_1 \perp a$ (tai įrodoma b–d punktuose).
b) $AO = BO$ — to paties apskritimo spinduliai; $AO_1 = BO_1$ — lygių apskritimų spinduliai; OO_1 — bendra. $\triangle AOO_1 = \triangle BOO_1$ pagal tris kraštines.
c) $\angle AOE = \angle BOE$ kaip atitinkami lygių trikampių AOO_1 ir BOO_1 kampai.
d) Lygiašonio trikampio AOB viršūnės kampo pusiaukampinė yra ir aukštinė, todėl $OE \perp AB$. Vadinasi, $OO_1 \perp a$.

6. STATISTIKA

Šiuolaikiniame gyvenime dažnai susiduriame su įvairių duomenų rinkimu ir apdorojimu. Iš surinktų ir statistiškai apdorotų duomenų daromos išvados, prognozės.

5–7 klasėse mokiniai mokėsi rinkti duomenis, užrašyti juos variacine eilute, dažnių lentele, pavaizduoti duomenis stulpeline ir skrituline diagramomis. Jie buvo pratinami suprasti, analizuoti, diskutuoti ir kritiškai vertinti lentelėse ar diagramose pateiktą medžiagą. 7 klasėje buvo gilinama aritmetinio vidurkio samprata, tobulinami vidurkio skaičiavimo įgūdžiai.

Šiame skyriuje yra 5 skyreliai. Pirmuose trijuose skyreliuose supažindinama su dar trimis duomenų vaizdavimo būdais: taškine diagrama, daugiakampiu ir histograma. Įvedamos naujos sąvokos: imtis, imties dydis, didžiausias ir mažiausias imties duomenys, imties plotis, imties vidurkis ir mediana. Mokoma grupuoti duomenis į intervalus, nubraižyti sugrupuotos imties histogramą.

Du paskutiniai šio skyriaus skyreliai — tai įvadas į tikimybes. Čia aiškinamos sąvokos: bandymo baigtis, atsitiktinis įvykis, būtinas ir negalimas įvykiai, vienodai tikėtini, labiau tikėtinas ir mažiau tikėtinas įvykiai.

Daug dėmesio skyriuje skirta diskusijoms, vertinimo, argumentavimo pratimams.

6.1. Statistinių duomenų pateikimo būdai. Imtis

5–7 klasėse buvo mokoma registruoti duomenis, vaizduoti juos variacine eilute, dažnių lentele, stulpeline ir skrituline diagramomis. Mokiniai diskutavo, kokias išvadas galima ir kokių negalima daryti iš surinktų duomenų (kiek jie atspindi tikrovę), mokėsi argumentuotai reikšti savo nuomonę.

Pakartoti:

duomenų užrašymą variacine eilute ir dažnių lentele;
stulpelinės ir skritulinės diagramų braižymą.

Išmokti:

kas yra imtis, imties dydis;
pavaizduoti imties duomenis taškine diagrama, daugiakampiu ir histograma.

Šiame skyrelyje:

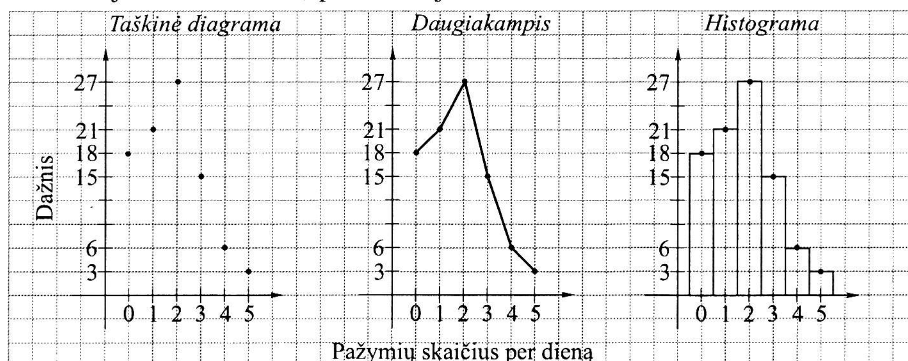
1. Aptariama, ką nagrinėja statistika.
2. Paaiškinama, kad statistiniai metodai leidžia ištyrus tam tikrą visumos dalį gauti daugiau ar mažiau patikimas išvadas apie visumą. Surinkti duomenys vadinami *imtimi*, o surinktų duomenų skaičius — *imties dydžiu*.
3. Pavyzdžiu primenami trys duomenų pateikimo būdai: duomenų rinkimo eilės tvarka, variacine eilute, dažnių lentele. Duomenų vaizdavimą skrituline diagrama turėtų prisiminti patys mokiniai atlikdami užduotį.
4. Toliau to paties pavyzdžio imties duomenys grafiškai vaizduojami koordinačių plokštumoje trimis būdais: taškine diagrama, daugiakampiu, histograma.

Taškinę diagramą sudaro taškai, žymintys duomenų dažnių reikšmes. *Daugiakampis* — tai laužtė, gauta taškinės diagramos taškus sujungus atkarpomis. *Histograma* — tai stulpelinė diagrama, sudaryta iš besiliečiančių stačiakampių, kurių aukščiai lygūs dažniams, o duomenų reikšmės yra stačiakampio pločių vidurio taškai.

Pastabos.

1. Kartais literatūroje vietoj termino daugiakampis vartojamas ir terminas *poligonas.*
2. Stulpeline diagrama vadiname bet kurią iš stačiakampių stulpelių sudarytą diagramą. Pavyzdžiui, žr. 459a uždavinio stulpelinę diagramą.
3. Dažnai, ypač matematinėje statistikoje, histograma vadinama tokia stulpelinė diagrama, kai vertikalioje ašyje atidedami ne dažniai, o santykiniai dažniai, t. y. duomenų dalis, patenkanti į atitinkamą horizontalųjį intervalą. Tada, laikant grupavimo intervalo ilgį lygiu 1 (t. y. pakeitus mastelį), histogramos stačiakampių plotų suma yra lygi 1. Taigi atitinkamai pasirinkus horizontalųjį ir vertikalųjį mastelius dažnių ir santykinių dažnių histogramos sutaps.

Paprastai brėžiamos grupuotų duomenų histogramos (žr. vadovėlio 6.3 skyrelį). Todėl histogramoje brėžiami besiliečiantys stačiakampiai ir tuo atveju kai duomenys nėra grupuoti.



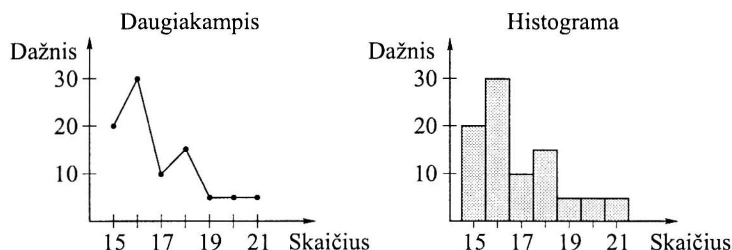
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

452–456 uždaviniai skirti naujai medžiagai įsisavinti. 454 uždavinys — individualiam darbui. Kiti pratimai — kartojimo: 457 — grafikų skaitymas, 458–461 — skritulinės, stulpelinės diagramų braižymas. Kartu mokiniai pakartos ir dalies, procento sąvoką, apytikslį skaičiavimą (uždaviniai tinka ir grupiniam darbui). Be to, kartojami taško atstumas iki tiesės (462), stačiojo trikampio plotas (463), erdviniai kūnai (464), veiksmai su laipsniais ir šaknimis (465, 466), prabos sąvoka (467), reiškinio sudarymas ir jo reikšmės radimas (468), dėsningumų nustatymas (469).

3–8

452. Dažnių lentelė:

Skaičius	15	16	17	18	19	20	21
Dažnis	20	30	10	15	5	5	5



453. a) Imties dydis — tai surinktų duomenų skaičius, t. y. $5+3+4+7+2=21$.
b) Dažniausiai pasikartoja (7 kartus) skaičius 9.
c) x ašyje atidedame skaičius 5, 7, 8, 9, 10.

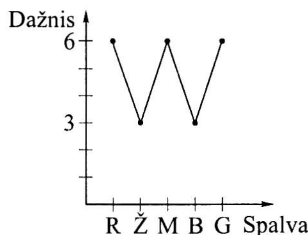
Dažnis 7 6 5 4 3 2 1
5 7 8 9 10
Skaičius

454. Uždavinys skirtas individualiam darbui. Patartume jį atlikti namuose.

455. a) Raudoną, geltoną ir mėlyną spalvas atitinkančių išpjovų kampai yra statūs, t. y. kiekvienas jų sudaro ketvirtąją skritulio dalį ($360° : 90° = 4$). Baltą ir žalią spalvas atitinkančių išpjovų kampai lygūs po $(360° - 3 \cdot 90°) : 2 = 45°$, t. y. kiekvienas sudaro aštuntadalį skritulio.
Geltoną, raudoną ir mėlyną spalvas pasirinko po $24 : 4 = 6$ vaikus, o baltą ir žalią — po $24 : 8 = 3$ vaikus.

b)

Spalva	R	Ž	M	B	G
Dažnis	6	3	6	3	6

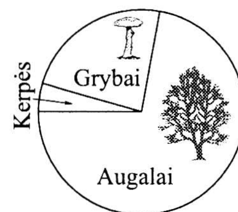


456. Uždavinys skirtas savarankiškam mokinių darbui arba darbui grupėmis. Atliktą darbą reikėtų aptarti klasėje.

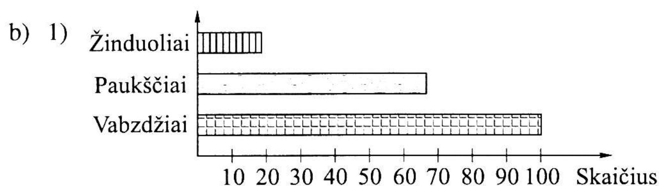
457. a) Parduotuvėje A apsilankė $10+20+25+22+18+10=105$ (pirkėjai);
B — $5+10+14+20+24+28=101$ (pirkėjas);
C — $15+15+17+20+16+21=104$ (pirkėjai);
b) $105 : 6 = 17{,}5$ (pirkėjo);
c) daugiausiai pirkėjų buvo parduotuvėje A, mažiausiai — parduotuvėje B;
d) I ir II valandą pirkėjų srautas buvo pastovus, III ir IV — didėjo, V — mažėjo, o VI — didėjo.

c) ir d) punktus rekomenduojama spręsti žodžiu.

458. a) Iš viso augalų rūšių yra $185+1+10+11+4=211$.
1) Kadangi 292 rūšys atitinka 360°, tai 211 rūšių atitiks $\frac{211 \cdot 360°}{292} \approx 260°$; 68 grybų rūšys atitiks $\frac{68 \cdot 360°}{292} \approx 84°$; 13 kerpių rūšių atitiks $\frac{13 \cdot 360°}{292} \approx 16°$. Kerpių rūšių atitinkamą skritulinės diagramos centrinį kampą galima apskaičiuoti ir taip: $360° - 260° - 84° = 16°$.
2) $\frac{4}{211} \cdot 100\% \approx 1{,}9\%$.

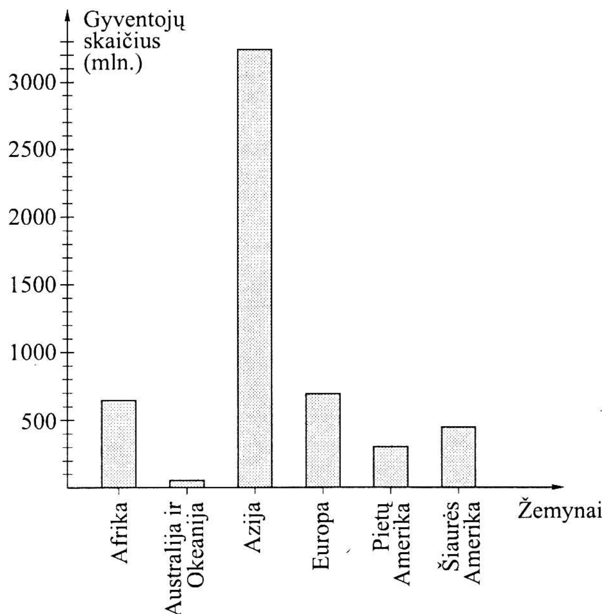


b) 1)



2) Žinduoliai sudaro $\frac{18}{212} = \frac{9}{106}$ dalis visų gyvūnų; paukščiai — $\frac{67}{212}$ dalis; vabzdžiai — $\frac{104}{212} = \frac{26}{53}$ dalis.

459. a)

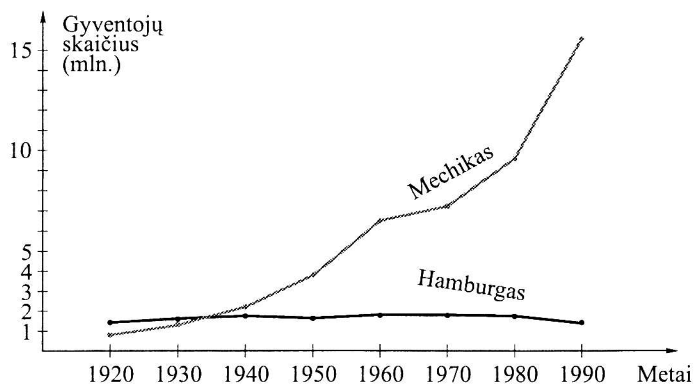


Prieš braižant diagramą patarkite mokiniams skaičius suapvalinti.

b) Iš viso gyventojų yra $672 + 27 + 3232 + 694 + 299 + 427 = 5351$ (mln.). Europos gyventojai sudaro $\frac{694}{5351}$ pasaulio gyventojų dalį. Tai maždaug aštuntadalis pasaulio gyventojų.

c) Lietuvoje gyvena $\approx 3{,}7$ mln. gyventojų. Tai apytiksliai sudaro 0,01 Europos gyventojų dalį.

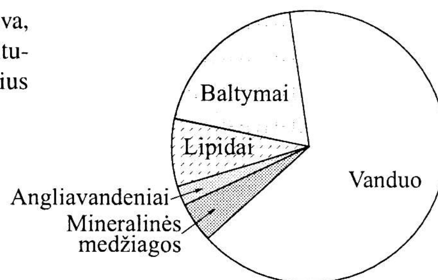
460. a) Pavaizduokime duomenis, pavyzdžiui, daugiakampiu.



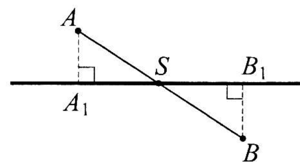
b) Hamburge, palyginus su Mechiku, gyventojų skaičius kito nesmarkiai. Mechike gyventojų skaičius nuolat didėjo, ypač paskutinį dešimtmetį.

461. a) Kadangi 70 kg atitinka 360° kampą, tai baltymus diagramoje atitiks išpjova, kurios kampas bus $\frac{14\cdot 360°}{70} = 72°$. Analogiškai apskaičiuojami ir kiti skritulinės diagramos centriniai kampai, t. y. lipidus atitiks 36°, angliavandenius — 4°, mineralines medžiagas — 17°, vandenį — 231° kampas.

b) $\frac{45}{70} \cdot 100\% \approx 64\%$.

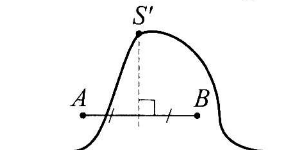


462. Visiškai aišku, kad reikia sujungti taškus A ir B ir stotelę statyti atkarpų AB ir A_1B_1 susikirtimo taške S. Lengva įrodyti, kad trikampiai AA_1S ir BB_1S yra lygūs, taigi tikrai $AS = SB$.



Kiek sunkiau įrodyti, kad daugiau norimų taškų nėra. Jeigu, pavyzdžiui, tašką S imsime dešiniau, tai bus $A_1S > SB_1$, ir pagal Pitagoro teoremą (ar pagal projekcijos savybę) $AS > SB$.

Žinoma, kai kelias nėra tiesus, gali būti visiškai beprasmiška statyti stotelę taške, vienodai nutolusiame nuo abiejų gyvenviečių — paveiksle vieta S' nepatogi abiejų gyvenviečių gyventojams.



Antrasis uždavinio klausimas: „Kur reikia statyti autobusų stotelę, kad ją pasiekti būtų vienodai patogu abiejų gyvenviečių gyventojams?" yra beprasmiškas be papildomų duomenų.

463. a) $S_\triangle = \frac{ab}{2}$; $S_\triangle = 6$, tai $a \cdot b = 12$ ir $a, b \in \mathbf{Z}$.

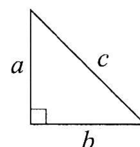
Kai $a = 1$, $b = 12$, tai $c = \sqrt{1^2 + 12^2} = \sqrt{145} \notin \mathbf{Z}$;

kai $a = 2$, $b = 6$, tai $c = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \notin \mathbf{Z}$;

kai $a = 3$, $b = 4$, tai $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \in \mathbf{Z}$.

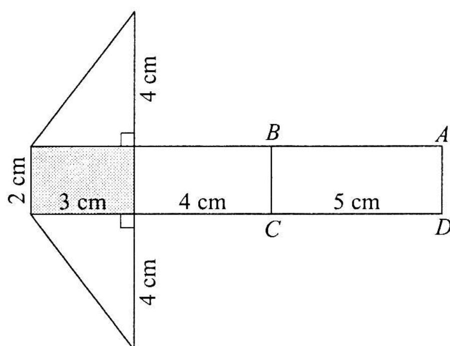
Atsakymas. 3, 4, 5.

b) 5, 12, 13.



464. a) $AB = DC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,(\text{cm})$, $BC = AD = 2\,\text{cm}$.

b)



465. a) $\frac{1}{16}$; b) $\frac{1}{36}$; c) $\frac{1}{16}$; d) $\frac{2}{9}$.

466. a) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{9}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{8}{9}} = \sqrt{2}$;

b) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{9} \cdot 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

467. $\frac{3{,}375 \cdot 1000}{4{,}5} = 750$.

468. a) $(16{,}5 + 2{,}1) \cdot 3{,}5 = 65{,}1\,(\text{km})$;

b) $16{,}5 \cdot 0{,}6 = 9{,}9\,(\text{km})$;

c) $(16{,}5 + 2{,}1) \cdot 3{,}5 + 16{,}5 \cdot 0{,}6 = 75\,(\text{km})$.

469. Reikia pastebėti, kad eilutė sudaryta iš abėcėlės raidžių, surašytų eilės tvarka praleidžiant kas antrą raidę:

~~A~~	Ą	~~B~~	C	~~Č~~	D	~~E~~	Ę	~~Ė~~	F	~~G~~	H	~~I~~	Į
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

6.2. Imties vidurkis, mediana. Didžiausias ir mažiausias imties duomenys

5–7 klasėse buvo mokoma apskaičiuoti aritmetinį vidurkį. Šiame skyrelyje pateikiama imties vidurkio skaičiavimo formulė palengvinanti skaičiavimus, kai turime pasikartojančių duomenų reikšmių. Taip pat įvedamas naujas imtį apibūdinantis skaičius — *mediana*. Imčiai apibūdinti yra ir kitų charakteristikų, bet jų 8 klasėje nenagrinėsime.

Pakartoti aritmetinio vidurkio skaičiavimą.

Išmokti:

rasti imties medianą;
nurodyti didžiausią ir mažiausią imties duomenis.

Šiame skyrelyje:

1. Aptariama, kad imties duomenis galima apibūdinti ir vienu ar keliais skaičiais (imties charakteristikomis).
   Pavyzdžiais parodoma, kaip imtį apibūdina jos didžiausias ir mažiausias duomuo, imties *vidurkis*.
2. Pateiktas algoritmas, kaip skaičiuojamas imties vidurkis, kai yra pasikartojančių duomenų. Šiuo algoritmu (formule) ypač patogu naudotis, kai duomenys pateikti dažnių lentele:

Duomenys	x_1	x_2	...	x_k
Dažniai	m_1	m_2	...	m_k

- apskaičiuojame duomenų sumą, t. y. duomenų reikšmes dauginame iš jų dažnio ir gautas sandaugas sudedame: $x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \cdots + x_k \cdot m_k$;
- apskaičiuojame imties dydį, t. y. sudedame dažnius: $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$;
- apskaičiuojame imties vidurkį, t. y. duomenų sumą dalijame iš imties dydžio:

$$\bar{x} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots + x_km_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}.$$

Pastaba. Pakanka, kad mokiniai suprastų algoritmą ir gebėtų jį taikyti spręsdami uždavinius.

3. Apibrėžiamas kitas svarbus imtį apibūdinantis skaičius — mediana.

> *Mediana vadinamas imties variacinės eilutės vidurinysis skaičius, kai imties dydis yra nelyginis skaičius, ir dviejų viduriniųjų skaičių aritmetinis vidurkis, kai imties dydis — lyginis skaičius.*

4. Pateikiami pavyzdžiai ir užduotys medianai rasti.
   Pastaba. Atkreipkite dėmesį į tai, kad mediana nesikeičia pakeitus, pavyzdžiui, didžiausią ir (arba) mažiausią iš duomenų.
5. Apibendrinamas 1–2 skyreliuose aprašytas ir nagrinėtas aštuntokų tyrimas iškeliant klausimą „Ką galėtume dar sužinoti...?"

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 470–476 pratimai: 470, 471 — paprasčiausi imties vidurkio, medianos bei didžiausio ir mažiausio imties duomenų radimo pratimai, 472, 473 moko skaityti lenteles, susirasti jose reikiamą informaciją, 475 ir 476 — naujos medžiagos įtvirtinimas, vidurkio sąvokos plėtojimas.

477–487 — kartojimo pratimai. 477 uždavinys reikalauja nemažai matematinių žinių, gebėjimų (siūlome spręsti klasėje). Kartojamas reiškinių prastinimas (478), bendro dauginamojo iškėlimas (479), lygčių sprendimas (480), procentų skaičiavimas bei diagramų braižymas (481), tūrio (482, 484), banko metinių palūkanų (486) skaičiavimas, mastelis ir trikampių braižymas (483), skaičių palyginimas (485) ir tekstinių (darbo) uždavinių sprendimas (487). 11–20

470. Vidurkis: $\frac{4+5\cdot2+8\cdot4+10}{8} = 7$. Mediana: $\frac{8+8}{2} = 8$.

471. a) Vidurkis yra 4, mediana — 5, didžiausias duomuo — 6, mažiausias — 1;
b) vidurkis yra 1, mediana — 1, didžiausias duomuo — 3, mažiausias — 0.

472. a) I būdu vidutiniškai gauta $(6{,}4 + 6{,}2 + 5{,}8) : 3 = 6{,}1(3) \approx 6{,}1$,
II būdu — $(6{,}9 + 6{,}5 + 6{,}5) : 3 = 6{,}6(3) \approx 6{,}6$,
III būdu — $(6{,}8 + 6{,}2 + 6{,}7) : 3 = 6{,}5(6) \approx 6{,}6$ (kg bulvių). Rekomenduojama atlikti klasėje.

b) Nors dešimtųjų kilogramo tikslumu II ir III būdu gautas trijų metų derliaus vidurkis yra vienodas, bet $6{,}6(3) > 6{,}5(6)$, todėl galima galvoti, kad antrasis sodinimo būdas yra geriausias.

c) Galima tikėtis, kad daugiausia bulvių galima išauginti II būdu. Šiuo būdu auginant galima tikėtis gauti apie $3{,}5 \cdot 5 \cdot 10^4 : 15 \cdot 6{,}6(3) \approx 77350$ (kg) $= 773{,}5$ (cnt) bulvių. Jei augintume bulves I būdu, tai galima tikėtis užauginti apie 715,2 cnt bulvių, o III būdu — apie 766,5 cnt bulvių.

Reikėtų paaiškinti, jog visiškai garantuoti, kad II būdas yra geriausias, negalima. Kito bandymo rezultatai (pavyzdžiui, sekančių metų) gali būti ir kitokie.

473. a) $2 + 5 + 21 + 30 + 34 + 20 + 14 + 8 + 4 + 2 = 140$ (automobilių). Rekomenduojama atlikti klasėje.
b) Daugiausia automobilių (34) važiavo 55 km/h greičiu.
c) ≈ 55 km/h. Kadangi $55 > 48$, tai galima sakyti, kad rekomenduojamas greitis buvo viršijamas.

474. *Nurodymas.* Uždavinys skirtas savarankiškam mokinių darbui. Aptarus klasėje gali būti skirtas namų darbams (grupėmis).

475. a)

Surinkti taškai	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Dažnis	2	4	5	7	7	8	10	9	4	2

b) $2 + 4 + 5 + 7 + 7 + 8 + 10 + 9 + 4 + 2 = 58$ (dalyviai).
c) $\approx 95{,}76$.
d) Daugiausia taškų (100) pelnė 2 dalyviai.

476. a) Sakykime, kad šeštoji bandelė svėrė x g.
Tuomet $6 \cdot 114 = 100 + 120 + 112 + 115 + 118 + x$, $x = 119$ g.
b) Išvardytų penkių bandelių masių mediana yra 115 g; visų šešių bandelių masių mediana yra 116,5 g.

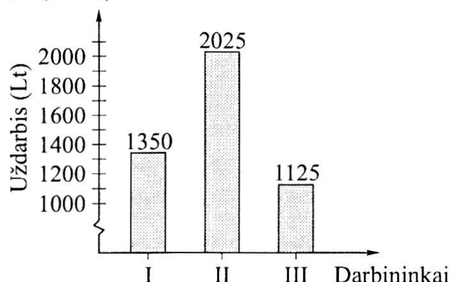
477. a) 204 km.
b) 11 h 45 min − 8 h 51 min = 2 h 54 min, t. y. $2\frac{54}{60}$ h = 2,9 h.
204 : 2,9 ≈ 70,3 (km/h).
c) Nuo Anykščių iki Jurbarko yra 199 km. Kelionė truko 199 : 80 = 2,4875 (h), t. y. ≈ 2 h 29 min. Į Jurbarką automobilis atvyko:
17 h 46 min + 2 h 29 min = 20 h 15 min.
d) Nuo Kauno iki Jurbarko — 86 km, o nuo Jurbarko iki Klaipėdos — 154 km.
Maršruto ilgis 86 + 154 = 240 (km).
Šiam atstumui įveikti reikia 240 : 80 = 3 (h). Autobusas kelyje sugaišo 3 h + 20 min = 3 h 20 min.
Taigi iš Kauno autobusas išvažiavo 12 h 10 min − 3 h 20 min = 8 h 50 min.
Vidutinis kelionės greitis lygus $240 : 3\frac{1}{3} = 72$ (km/h).
Jei autobusas iš Kauno važiuotų tiesiai į Klaipėdą, tai kelionėje sugaištų 214 : 80 = 2,675 (h), t. y. ≈ 2 h 41 min. Taigi į Klaipėdą jis atvyktų 8 h 50 min + 2 h 41 min = 11 h 31 min.

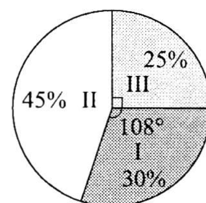
478. a) $20x^5$; b) $-3x^3$; c) a^4b^2; d) $30a^4m^4$; e) $-7a^2c^8$; f) $a^{13}b^{13}$.

479. a) $6(a + 2)$; b) $3(1 - c)$; c) $3m^4(3 - 2m)$; d) $10a^5(a - 3)$.

480. a) 30; b) 70; c) −6; d) 7.

481. a) 100% − 30% − 45% = 25%.
b) Pirmas darbininkas gavo $4500 \cdot 0{,}3 = 1350$ (Lt),
antras — $4500 \cdot 0{,}45 = 2025$ (Lt),
trečias — $4500 \cdot 0{,}25 = 1125$ (Lt).





482. $AB = DC$, todėl šiom lystelėm reikės $2 \cdot 80 \cdot 10 \cdot 2 = 3200$ (cm^3) lentučių. Ieškodami, kiek cm^3 lentučių reikės lystelei AC, pirmiausia apskaičiuojame jos ilgį (žr. 357 uždavinio sprendimą): $AC = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100$. Šiai lystelei reikės $100 \cdot 10 \cdot 2 = 2000$ (cm^3).
Iš viso reikės $3200 + 2000 = 5200$ (cm^3) lentučių.

483. Brėžinyje atstumai bus: $AB = 4$ cm; $BC = 5$ cm; $AC = 7$ cm.

484. a) $V = 5 \cdot 4 \cdot 12 = 240$;
b) prizmės pagrindo aukštinė, nubrėžta į trumpesniąją kraštinę, lygi $\sqrt{8^2 - 3^2} = \sqrt{55}$, pagrindo plotas lygus $3\sqrt{55}$, o tūris lygus $60\sqrt{55}$.

485. a) $\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = 3\sqrt{7}$. Kadangi $3\sqrt{7} > 2\sqrt{7}$, tai $\sqrt{63} > 2\sqrt{7}$;
b) $3\sqrt{3} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{27}$. Kadangi $\sqrt{27} < \sqrt{48}$, tai $3\sqrt{3} < \sqrt{48}$.

486. a) $\begin{matrix}(1551 - 1500)\text{ Lt} — x\% \\ 1500\text{ Lt} — 100\%\end{matrix} \longrightarrow x = \dfrac{(1551 - 1500) \cdot 100}{1500} = 3{,}4(\%)$;

b) $\begin{matrix}(8487 - 8200)\text{ Lt} — y\% \\ 8200\text{ Lt} — 100\%\end{matrix} \longrightarrow y = \dfrac{(8487 - 8200) \cdot 100}{8200} = 3{,}5(\%)$.

487. Per 1 valandą leidžiant vandenį abiem vamzdžiais galima pripildyti $\frac{1}{3}$ baseino, pirmu vamzdžiu — $\frac{1}{5}$ baseino, o antru — $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ (baseino). Leidžiant vandenį antru vamzdžiu pripildyti baseiną galima per $1 : \frac{2}{15} = 7{,}5$ (h).
Galima šį uždavinį spręsti ir sudarius lygtį $\frac{1}{5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$.
Atsakymas. Per 7,5 h.

6.3. Imties plotis. Duomenų grupavimas

Šiame skyrelyje aiškinama, kaip grafiškai galima pavaizduoti daug skirtingų duomenų. Kai skirtingų duomenų yra labai daug, juos patogu vaizduoti histograma prieš tai duomenis sugrupavus į intervalus. Svarbiausia, kad mokiniai:

- suvoktų, kada patogu duomenis vaizduoti sugrupuotų duomenų histograma;
- mokėtų tinkamai sugrupuoti duomenis ir juos pavaizduoti histograma;
- mokėtų apibūdinti histograma pavaizduotus sugrupuotus duomenis.

Pastaba. Vadovėlyje ir uždavinyne beveik nėra uždavinių, kuriuose reikėtų analizuoti pateiktą duomenų histogramą, todėl pasiūlykite mokiniams laikraščiuose ir žurnaluose surasti taip pateiktų duomenų ir paprašykite juos pakomentuoti.

Pakartoti histogramos braižymą.

Išmokti:
nustatyti imties plotį;
sugrupuoti imties duomenis į intervalus;
nubraižyti sugrupuotų duomenų histogramą.

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiu aiškinama, kaip duomenis sugrupuoti į intervalus ir pavaizduoti grafiškai. Atkreipkite mokinių dėmesį, kad iš sugrupuotų duomenų histogramos pradinių duomenų atkurti negalima, galima tik nustatyti, kiek buvo duomenų iš viso ir kiek duomenų patenka į tam tikrą intervalą.
Pastaba. Intervalo sąvoka bus įteisinta kitame skyriuje: „Matematika 8, II dalis", 7 skyrius, todėl mokinius jau reikia pratinti prie intervalo sąvokos ir rašymo.
2. Apibrėžtas imties plotis:

Skirtumas tarp didžiausio ir mažiausio imties duomenų vadinamas imties pločiu.

Imties plotis rodo duomenų išsibarstymą. Kuo plačiau jie išsisklaidę, tuo imties plotis didesnis.

3. Pateikiami patarimai, kaip grupuoti duomenis į intervalus.

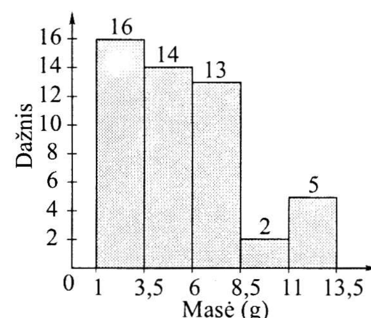
PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

488–492 uždaviniai yra teminiai. Jie skirti duomenų grupavimo įgūdžiams diegti bei sugrupuotų duomenų histogramoms braižyti.
493 ir 494 pratimais kartojamas imties vidurkis ir mediana. Taip pat kartojimui skirti 495–505 uždaviniai: reiškinių prastinimas (495), lygčių sprendimas (496, 504), bendro dauginamojo iškėlimas (497), procentų (498) ir promilių (501) radimas, skaičiaus užrašymas standartine išraiška (499), reiškinių su kvadratinėmis šaknimis pertvarkymas (500), dalumo iš 3 ir 5 požymių taikymas (502), trapecijos ploto radimas (503).
506 uždavinys galėtų būti ilgalaikė užduotis, apibendrinanti trijų skyrelių teorinę medžiagą. Šis darbas galėtų pakeisti kontrolinį darbą.

21–26

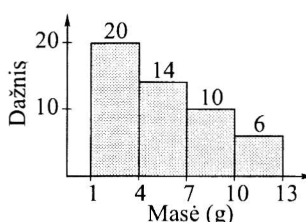
488. a)

Intervalas	[1,0; 3,5)	[3,5; 6,0)	[6,0; 8,5)	[8,5; 11,0)	[11,0; 13,5]
Dažnis	16	14	13	2	5



b)

Intervalas	[1; 4)	[4; 7)	[7; 10)	[10; 13]
Dažnis	20	14	10	6



489. a)

Intervalas	[50; 80)	[80; 110)	[110; 140)	[140; 170)	[170; 200)	[200; 230)	[230; 260]
Dažnis	2	2	5	17	17	17	3

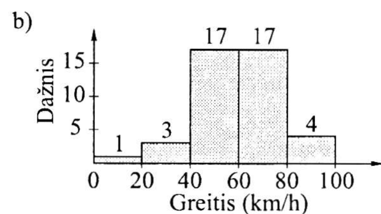
b)

Intervalas	[20; 80)	[80; 140)	[140; 200)	[200; 260]
Dažnis	2	7	34	20

490. a)

Intervalas	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100]
Dažnis	1	3	17	17	4

b)



c) $\frac{17+4}{1+3+2\cdot17+4} = \frac{21}{42} = \frac{1}{2}$. Greitį viršijo pusė stebėtų automobilių.

491. a) 130 g; 16 g.

b) Visi duomenys telpa į intervalą, pvz., nuo 0 iki 140.

c)

Intervalas	[0; 28)	[28; 56)	[56; 84)	[84; 112)	[112; 140]
Dažnis	9	15	13	7	6

492. Uždavinys skirtas savarankiškam mokinių darbui.

493. *Nurodymas*. Aptarkite, ką rodo procentinis santykis. Šiuo atveju visų mokyklos mergaičių skaičiaus ir visų mokyklos berniukų skaičiaus santykis, išreikštas procentais, parodo, kad 100 berniukų tenka 95,6 (95,6%) mergaitės. Paprašykite apskaičiuoti berniukų ir mergaičių procentinį santykį.

a) Vidutinis mokinių skaičius klasėje yra 22,1, o mergaičių — 10,8.

b) Vidutinis berniukų skaičius klasėje yra 11,3, o mokyklos mergaičių ir berniukų procentinis santykis bus $\frac{108}{113} \cdot 100\% \approx 95,6\%$.

494. a) 0,18 s; b) 0,56 s;

c) I grupės reakcijos greičio vidurkis $\approx 0,389$, mediana 0,38;
II grupės reakcijos greičio vidurkis $\approx 0,397$, mediana 0,39;
II grupės reakcijos greičio ir vidurkis, ir mediana didesni.

495. a) a^9; b) 1; c) a^2; d) a^6.

496. a) 8; b) 42; c) 10; d) 14.

497. a) $(x+y)(2+x+y)$; b) $(p-q)(p-q+4)$;
c) $(m-n)(2m+2n-1)$; d) $(b+c)(a-b+c)$.

498. Sporto būrelius lanko $800 \cdot 0,8 = 640$ (mokinių), o baseiną lanko $640 \cdot 0,05 = 32$ (mokiniai).

499. a) $4,2 \cdot 10^3$; b) $3,5 \cdot 10^{-3}$; c) $5,11 \cdot 10^{-1}$; d) $2,4 \cdot 10^4$.

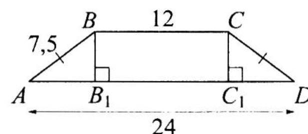
500. a) -6; b) 8.

501. a) Kadangi druskingumas yra 6–8‰, tai 1 kg jūros vandens yra 0,006–0,008 kg druskų. Tada 1 t jūros vandens yra 6–8 kg druskų.

b) $5\,\text{m}^3$ vandens masė yra $5\,\text{m}^3 \cdot 1,03\,\text{g/cm}^3 = 5000000\,\text{cm}^3 \cdot 1,03\,\text{g/cm}^3 =$ $= 5150000\,\text{g} = 5150\,\text{kg} = 5,15\,\text{t}$. Taigi $5\,\text{m}^3$ jūros vandens yra nuo 30,9 kg iki 41,2 kg druskų.

502. a) 96; b) 90.

503. $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BB_1$; $BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2} = \sqrt{7,5^2 - AB_1^2}$;



$AB_1 = C_1D = (24-12) : 2 = 6$; $BB_1 = \sqrt{7,5^2 - 6^2} = 4,5$.
$S_{ABCD} = \frac{12+24}{2} \cdot 4,5 = 81\,(\text{cm}^2)$.

504. Ieškomą reiškinį pažymėkime A.

$$(a-b)^2 + A = (a+b)^2, \quad A = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab.$$

505. Draugai nuvažiavo prie ežero per $\frac{15}{8}$ h. Grįždami iki plento jie sugaišo $\frac{9}{8}$ h. Plentu iki gyvenvietės jie turėjo nuvažiuoti per $\frac{6}{8}\,\text{h} = \frac{3}{4}\,\text{h}$.
Atstumas, nuvažiuotas plentu, lygus $\sqrt{15^2 - 9^2} = 12\,(\text{km})$.
Greitis plentu lygus $12\,\text{km} : \frac{3}{4}\,\text{h} = 16\,\text{km/h}$.

6.4. Bandymai ir jų baigtys

Tai įvadas į tikimybių teoriją. 5 ir 6 klasėse mokiniai susipažino su bandymu ir su juo susijusiais atsitiktiniais įvykiais. Šiame skyrelyje plačiau nagrinėjamas bandymas ir su juo susiję galimos baigtys bei įvykiai, kalbama apie *įvykiui palankias baigtis*, įvedamos *būtinojo*, *negalimojo* įvykių sąvokos. 9 klasėje ši tema bus nagrinėjama kiek plačiau.

Išmokti:

išvardyti galimas bandymo baigtis;
išvardyti įvykiui palankias baigtis;
paaiškinti, koks įvykis vadinamas būtinuoju ir koks — negalimuoju.

Šiame skyrelyje:

1. Trumpai supažindinama su bandymais ir jų baigtimis. Bandymas gali turėti vieną ar keletą baigčių. Jei mestume į viršų akmenį ir stebėtume, ar akmuo nukris ant žemės, tai kiekvieną kartą gautume tą patį rezultatą. Taigi bandymas turi vieną baigtį — akmuo nukrenta. Yra bandymų, kurių galimų baigčių skaičių nusakyti galime, bet pasakyti, kuria baigtimi baigsis bandymas — negalime. Pavyzdžiui, išmesta moneta gali atvirsti arba herbu, arba skaičiumi, t. y. bandymas turi dvi galimas baigtis. Kuria puse atvirs moneta, prieš atliekant bandymą nustatyti neįmanoma — tai atsitiktinumo pasekmė: „atsivertė skaičius“ arba „atsivertė herbas“.
2. Pavyzdžiu aiškinama, kas yra *įvykiui palanki baigtis*. Aiškinamas skirtumas tarp galimų bandymo baigčių ir su tuo bandymu susijusių atsitiktinių įvykių. Pavyzdžiui, metant lošimo kauliuką yra šešios baigtys: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6. Galima nusakyti įvairių su šiuo bandymu susijusių atsitiktinių įvykių: A — iškrito lyginis akučių skaičius; B — iškrito akučių skaičius, dalus iš 3 ir t. t. Bet iš tikrųjų visus įvykius vienareikšmiškai nusako jiems palankios baigtys. Įvykiui A palankios baigtys yra E_2, E_4, E_6, o įvykiui B palankios baigtys yra E_3 ir E_6. Taigi galima būtų sakyti, kad įvykių yra tiek, kiek yra baigčių aibės poaibių.
Pastaba. Įvykius dažniausiai žymime didžiosiomis raidėmis.
3. Paaiškinama, kad įvykis, kuris įvyksta kiekvieną kartą atlikus bandymą, yra *būtinas*, o kuris neįvyksta niekada — *negalimas*.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

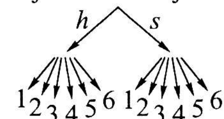
507–512 uždaviniai skirti einamai medžiagai nagrinėti: bandymo baigtims bei įvykiui palankioms baigtims išvardyti, būtiniesiems ir negalimiesiems įvykiams skirti. 513–522 kartojimo uždaviniai: primenama trikampio nelygybė (513), taškų atidėjimas koordinačių plokštumoje bei trikampio ploto (514) ir apskritimo ilgio bei skritulio ploto (515) radimas, lygčių sprendimas (516), kvadratinės šaknies apibrėžimas (519), skaičių reiškimas dešimtainėmis periodinėmis trupmenomis ir jų apvalinimas (520), darbo užmokestis (521), raidinio reiškinio sudarymas (523) ir reiškinio reikšmės radimas (518). 522 — kombinatorikos propedeutika.

31–33

507. *Nurodymas.* Mokiniams reikėtų paaiškinti, ką reiškia „žaidžia iki pergalės“. Pavyzdžiui, žaidžiami du kėliniai po 20 minučių. Jei rezultatas būna lygus, tai žaidžiama iki pirmojo kurios nors komandos taiklaus metimo.
Atsakymas. Galimos baigtys yra dvi: „laimėjo 8^a“ ir „laimėjo 8^b“.

508. Visas galimas bandymo baigtis patogu pavaizduoti galimybių medžiu. Iš viso yra 12 baigčių: $h1$, $h2$, $h3$, $h4$, $h5$, $h6$, $s1$, $s2$, $s3$, $s4$, $s5$, $s6$.

Galimybių medis bus plačiai nagrinėjamas 9 klasėje.



509. Būtinasis įvykis D; negalimasis įvykis E.

510. a)

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

b)

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

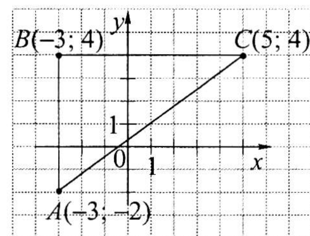
c) Įvykiui A palankios baigtys: (5, 6); (6, 5); (6, 6);
įvykiui B — (1, 1); (6, 6);
įvykiui C — (1, 5); (2, 4); (3, 3); (4, 2); (5, 1); (6, 6);
įvykiui D — (2, 1); (3, 1); (3, 2); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5).

511. a) Būtinojo įvykio pavyzdys: „ištrauktas rutulys yra arba baltas, arba raudonas“. Negalimojo įvykio pavyzdys: „ištrauktas žalias rutulys“.
b) Būtinojo įvykio pavyzdys: „bent vienas ištrauktas rutulys yra baltas“. Negalimojo įvykio pavyzdys: „ištraukti du raudoni rutuliai“.

512. a) hhh, hhs, hsh, shh, hss, shs, ssh, sss.
b) Įvykiui A palankios baigtys: hhs, hsh, shh; įvykiui B — hss, shs, ssh; įvykiui C — sss; įvykiui D — hhh; įvykiui E — hss, shs, ssh, sss.
c) Būtinojo įvykio pavyzdys: „s atvirto 0, 1, 2 arba 3 kartus“. Negalimojo įvykio pavyzdys: „neatvirto nei s, nei h“.

513. Turi galioti trikampio nelygybė, t. y. kiekviena trikampio kraštinė turi būti trumpesnė už kitų dviejų kraštinių sumą.
Nurodymas. Pakanka patikrinti, ar dviejų trumpesniųjų kraštinių ilgių suma yra didesnė už ilgiausiąją kraštinę.
a) Kadangi $5 + 12 = 17$, tai trikampio kraštinių ilgiai negali būti išreikšti skaičiais 5; 17; 12.
b) Kadangi $5 + 5 = 10$, tai trikampio kraštinių ilgiai negali būti išreikšti skaičiais 10; 5; 5.
c) Kadangi $1+2 > \sqrt{5}$, tai trikampio kraštinių ilgiai gali būti išreikšti skaičiais $\sqrt{5}$; 1; 2.
d) Kadangi $\sqrt{3} + \sqrt{3} < 6$, tai trikampio kraštinių ilgiai negali būti išreikšti skaičiais $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 6.

514. $BC = \sqrt{(5+3)^2 + (4-4)^2} = 8$,
$BA = \sqrt{(-3+3)^2 + (-2-4)^2} = 6$,
$AC = \sqrt{(5+3)^2 + (4+2)^2} = 10$.
Kadangi $6^2+8^2 = 10^2$, tai pagal teoremą, atvirkštinę Pitagoro teoremai, $\triangle ABC$ yra status. Vadinasi, $S = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.
Kadangi taškų B ir C koordinatės y yra vienodos, t. y. lygios 4, tai $BC \parallel x$ ir BC galima rasti netaikant atstumo tarp dviejų taškų formulės: $BC = 5 - (-3) = 8$. Analogiškai $AB = 4 - (-2) = 6$.



515. a) $C_{\text{didelio}} = 2\pi R = 8{,}4\pi$ (cm), $C_{\text{mažo}} = 2\pi r = 4\pi$ (cm);
$S = S_{\text{didelio}} - S_{\text{mažo}} = \pi R^2 - \pi r^2 = (R^2 - r^2)\pi = (4{,}2^2 - 2^2)\pi =$
$= 13{,}64\pi$ (cm^2).
b) 12π dm; 7π dm; $23{,}75\pi$ dm^2.

516. a) −100; 0; b) 0; 10; c) 0; 0,16; d) 0; 10.

517. 360 dienų.

518. a) 22,5 m; b) 30 m; c) 70 m; d) 96 m.

519. Pagal kvadratinės šaknies apibrėžimą šaknies reikšmė turi būti neneigiamasis skaičius.

520. $\frac{7}{15} = 0{,}4(6)$. a) 0,5; b) 0,47; c) 0,467.
$3\frac{2}{3} = 3{,}(6)$. a) 3,7; b) 3,67; c) 3,667.

521. a) 10,2;
b) $(1071 - 324) \cdot 0{,}33 = 246{,}51$ (Lt);
c) $1071 \cdot 0{,}03 = 32{,}13$ (Lt);
d) $1071 - 246{,}51 - 32{,}13 = 729{,}36$ (Lt).

Pareiginis atlyginimas = bazinė mėnesinė alga × kvalifikacinis koeficientas.
Nuo 2000 01 01 mokesčio *SODRAI* tarifas yra 3%.

522. Visus galimus Gražinos apsirengimo būdus patogu surašyti lentelėje.

Sijonėlis	baltas	baltas	baltas	baltas	pilkas	pilkas	pilkas	pilkas
Palaidinukė	gelsva	žydra	rausva	mėlyna	gelsva	žydra	rausva	mėlyna

523. Vienos rūšies riešutų yra a kg, kitos — b kg.
Mišinio kaina lygi $\frac{\text{Visų riešutų kaina}}{\text{Visų riešutų masė}} = \frac{20a+30b}{a+b}$ (Lt).

6.5. Kuris įvykis tikėtinesnis?

Sąvokos *vienodai tikėtini* įvykiai, *mažiau tikėtinas* ar *labiau tikėtinas* mokiniams pažįstamos nuo 5 klasės. Šiame skyrelyje siekiama jas pakartoti ir suteikti joms tikimybinę prasmę. Sprendžiami sudėtingesni ir įvairesni uždaviniai.

Pakartoti sąvokas *vienodai galimi*, *mažiau tikėtinas* ar *labiau tikėtinas* įvykiai.

Išmokti:
taikyti šias sąvokas sprendžiant uždavinius;
daryti argumentuotas išvadas.

Šiame skyrelyje:

1. Klasėje atliekamas bandymas mėtant monetą ir aptariama, ar pasikartos rezultatas pakartojus bandymą tokiomis pat sąlygomis.
2. Aptariami *vienodai galimi* (*vienodai tikėtini*) įvykiai.
3. Pateiktas pavyzdys, kur palyginami du su kauliuko mėtymu susiję įvykiai žodžiais „labiau tikėtinas“.
4. Pateikta 2 užduotis, kurią atliekant labai svarbu nesuklysti randant visas vienodai galimas baigtis. Iš viso yra 4 baigtys (h, h), (h, s), (s, h), (s, s). Viena iš šių baigčių — baigtis (h, h) yra nepalanki Dariui, viena (s, s) — nepalanki Mariui, o Dovilei nepalankios dvi baigtys (h, s) ir (s, h). Vadinasi, jai laimėti galimybių mažiau. Tad mergaitė pasielgė teisingai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šio skyrelio medžiagai įsisavinti skirti 524–532 pratimai. 533–535 — statistikos skyrelių kartojimo uždaviniai, o 536–541 — ankstesnio kurso kartojimas, 542 — probleminis uždavinys.

27–30, 34–36

524. a) A; b) B.

525. *Nurodymas.* Sąlygoje vietoje „Kiekvienas traukia lapelį nežiūrėdamas“ geriau būtų pasakyti, pavyzdžiui, taip: „Pirmasis nežiūrėdamas traukia lapelį Jonukas“.
a) Abu įvykiai yra vienodai tikėtini.
b) Diskusijai skirtas klausimas. Tai priklauso nuo to, ko klasėje daugiau: berniukų ar mergaičių.

526. Ištrauktas tuščias bilietas.

527. Mažiausiai tikėtina, kad paimto saldainio popieriukas bus raudonas.

528. 1) a) A ir B vienodai tikėtini įvykiai; b) įvykis A mažiau tikėtinas už įvykį B; c) įvykis B mažiau tikėtinas už įvykį A.
2) a) C ir D vienodai tikėtini įvykiai; b), c) — įvykis C mažiau tikėtinas už įvykį D.

529. a) E_1 — iškrito 1 akutė; E_2 — iškrito 2 akutės; E_3 — iškrito 3 akutės; E_4 — iškrito 4 akutės; E_5 — iškrito 5 akutės; E_6 — iškrito 6 akutės.
b) Įvykiui A palanki baigtis E_1; įvykiui B — E_2; įvykiui C — E_3; įvykiui D — E_1; įvykiui E — E_5, E_6; įvykiui F — E_6; įvykiui M — E_2, E_4, E_6; įvykiui N — E_1, E_3, E_5; įvykiui K — E_4, E_5, E_6; įvykiui L — E_1, E_2.
c) Mažiausiai tikėtini įvykiai yra A, B, C, D, F; labiausiai tikėtini — M, N, K.

530. a)

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	4	6	8	0	2
⚂	3	6	9	2	5	8
⚃	4	8	2	6	0	4
⚄	5	0	5	0	5	0
⚅	6	2	8	4	0	6

b)

Sandaugos paskutinis skaitmuo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dažnis	6	1	6	2	5	5	6	0	4	1

c) Įvykiui A_0 palankios yra šios baigtys: (2; 5), (4; 5), (5; 2), (5; 4), (5; 6), (6; 5);
įvykiui A_1 — (1; 1);
įvykiui A_2 — (1; 2), (2; 1), (2; 6), (3; 4), (4; 3), (6; 2);
įvykiui A_3 — (1; 3), (3; 1);
įvykiui A_4 — (1; 4), (2; 2), (4; 1), (4; 6), (6; 4);
įvykiui A_5 — (1; 5), (3; 5), (5; 1), (5; 3), (5; 5);
įvykiui A_6 — (1; 6), (2; 3), (3; 2), (4; 4), (6; 1), (6; 6);
įvykiui A_7 palankių baigčių nėra;
įvykiui A_8 — (2; 4), (3; 6), (4; 2), (6; 3);
įvykiui A_9 — (3; 3).

d) Vienodai tikėtini yra įvykiai A_0, A_2 ir A_6; A_1 ir A_9; A_4 ir A_5.
e) Pavyzdžiui, negalimasis įvykis: „lošimo kauliukų atvirtusių akučių sandaugos paskutinis skaitmuo yra 7“; būtinasis: „lošimo kauliukų atvirtusių akučių sandaugos paskutinis skaitmuo yra bet koks, išskyrus 7“.

531. a) Abu įvykiai yra vienodai tikėtini; b) įvykis C labiau tikėtinas nei įvykis D; c) įvykis E mažiau tikėtinas nei įvykis F.

532. a) Laimėjo statę už 26, už lyginius, už juodą spalvą, už antrą pusę, už trečiuosius 12; b) 1) — A_1, 2) vienodai tikėtini, 3) — C_2.

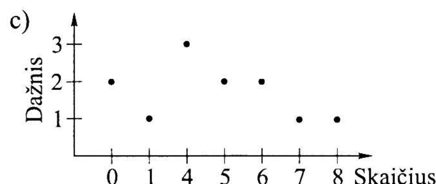
Rekomenduojama skirti namų darbams.

533. a) Aldonos pažymių vidurkis yra 8,2, Nijolės — 7,1(6), Raimondos — 7,(6), Vaidos — 6,714... Taigi didžiausias pažymių vidurkis yra Aldonos.
b) 7,375;
c) Aldonos ir Raimondos pažymių vidurkiai didesni už visų pažymių vidurkį, o Nijolės ir Vaidos — mažesni.

534. a) 0, 0, 1, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8;
b)

Skaičius	0	1	4	5	6	7	8
Dažnis	2	1	3	2	2	1	1

c)

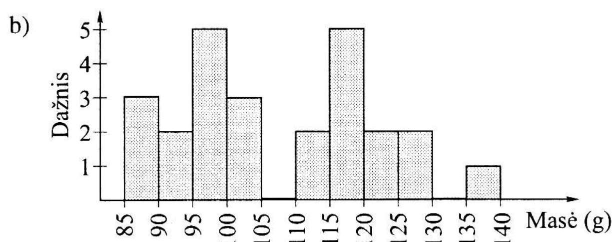


d) Vidurkis lygus 4,1(6), mediana yra 4,5.

535. a)

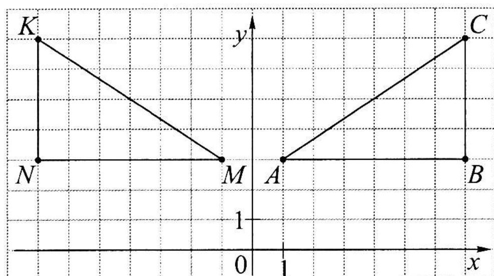
Intervalai	[85; 90)	[90; 95)	[95; 100)	[100; 105)	[105; 110)	[110; 115)	[115; 120)	[120; 125)	[125; 130)	[130; 135)	[135; 140]
Dažnis	3	2	5	3	0	2	5	2	2	0	1

b)



536. Abiejų trikampių (nuspalvinto ir nenuspalvinto) aukštinė yra ta pati. Pažymėkime ją h. Nenuspalvinto trikampio kraštinę, į kurią nubrėžta aukštinė, patogu pažymėti $3x$. Tada $S = \frac{3x \cdot h}{2}$; $18 = \frac{3x \cdot h}{2}$, $xh = 12$. Nuspalvinto trikampio kraštinė, į kurią nubrėžta aukštinė, bus $2x$, o $S = \frac{2x \cdot h}{2} = x \cdot h = 12\,(\text{cm}^2)$.

537. $S_{ABC} = S_{MNK} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12.$



538. a) Galima spręsti taip: $90\,\text{km/h} = \frac{90\,\text{km}}{1\,\text{h}} = \frac{90\,\text{km}}{3600\,\text{s}} = \frac{1\,\text{km}}{40\,\text{s}}$. Taigi 1 km automobilis nuvažiuoja per 40 s;
b) 36 s; c) 30 s.

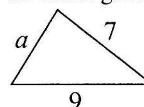
539. Kelią pažymėkime 1 (vienetu). Pirmą pusę kelio mokinys ėjo $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$ (h), antrąją — $\frac{1}{2} : 6 = \frac{1}{12}$ (h). Į mokyklą jis nuėjo per $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}$ (h). Iš mokyklos grįžo per $1 : 5 = \frac{1}{5}$ (h). Liko palyginti trupmenas $\frac{5}{24}$ ir $\frac{1}{5}$. $\frac{5}{24} = \frac{25}{120}$, o $\frac{1}{5} = \frac{24}{120}$. Taigi į mokyklą mokinys ėjo ilgiau, nes $\frac{25}{120} > \frac{24}{120}$.

540. a) Ne; b) taip; c) ne; d) taip.

541. a) 4,8 kg; 1,6 kg; 11,2 kg; b) 6,25 cnt; 15 cnt; 125 cnt.

542. Remiantis trikampio nelygybe: $a < 7 + 9$, t. y. $a < 16$; $7 + a > 9$, t. y. $a > 2$; $9 + a > 7$, t. y. visada. Taigi trečioji trikampio kraštinė a turi būti ilgesnė už 2 cm, bet trumpesnė už 16 cm. Nepanaudotos vielos gali būti daugiau negu 8 cm, bet mažiau negu 22 cm.

Rekomenduojame spręsti klasėje arba skirti gabesniems mokiniams.



7. TIESINĖS NELYGYBĖS

Pagrindinėje mokykloje svarbu išmokyti mokinius spręsti tiesines (pirmojo laipsnio) lygtis su vienu nežinomuoju ir tiesines nelygybes su vienu kintamuoju. Šio skyriaus medžiaga tarsi sudaryta iš keturių dalių: dar kartą kartojama ir mokoma spręsti tiesines lygtis, po to išsiaiškinus skaitinių nelygybių savybes pereinama prie tiesinių nelygybių su vienu kintamuoju sprendimo, ir paskiausiai sprendžiamos dviejų tiesinių nelygybių sistemos. Tiek lygties, tiek nelygybės sąvokos nėra naujos. Tiesines lygtis buvo mokoma spręsti jau žemesnėse klasėse, tik šiame skyriuje papildomai nagrinėjami atvejai, kai lygtis sprendinių neturi arba kiekvienas skaičius yra lygties sprendinys. Visiškai nauja yra sistemos sąvoka. (Tiesinių lygčių sistemos bus nagrinėjamos 9 klasėje.)

Mokant spręsti nelygybes reikia siekti, kad mokiniai suprastų analogiją tarp lygčių ir nelygybių sprendimo. Pagrindinis tikslas — išmokyti spręsti tiesines nelygybes bei tiesinių nelygybių sistemas.

7.1. Tiesinė lygtis

Lygties sąvoka mokiniams yra gerai žinoma. Lygtys buvo sprendžiamos jau nuo pradinių klasių. 7 klasėje buvo mokoma spręsti pirmojo laipsnio (tiesines) lygtis su vienu nežinomuoju. Taip pat buvo mokoma spręsti tekstinius uždavinius sudarant lygtis. Šiame skyrelyje įteisinama *tiesinės lygties* su vienu nežinomuoju sąvoka. Paprastai tiesinė lygtis su vienu nežinomuoju turi vieną sprendinį. Atskirus atvejus, kai lygtis neturi sprendinių arba kai sprendinys yra kiekvienas skaičius, patartina nagrinėti tik su stipresniais mokiniais. Šio skyrelio tikslas — pagilinti ir apibendrinti žinias apie tiesines (pirmojo laipsnio) lygtis. Mokytojui būtina pasiekti, kad mokiniai mokėtų jas spręsti ir išmoktų spręsti tekstinius uždavinius sudarydami tiesines lygtis.

Pakartoti:

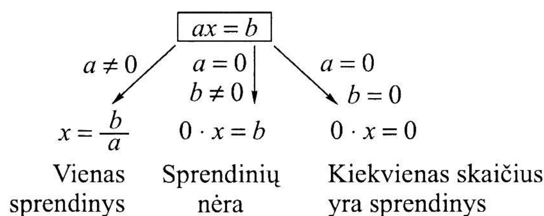
lygties ir jos sprendinio apibrėžimą;
ką reiškia „išspręsti lygtį“;
pirmojo laipsnio lygties su vienu nežinomuoju sprendimą.

Šiame skyrelyje:

1. Išnagrinėjus 1 uždavinį vadovėlio teorinėje dalyje primenama, kad sprendžiant lygtis galima:
   - prie abiejų lygties pusių pridėti arba atimti tą patį skaičių ar reiškinį;
   - abi lygties puses dauginti arba dalyti iš to paties skaičiaus, nelygaus nuliui.
2. Išnagrinėjus 2 uždavinį pateikiamas tiesinės lygties su vienu nežinomuoju apibrėžimas:

   Lygtį, kurią galima užrašyti pavidalu $ax = b$ (a ir b — skaičiai, x — nežinomasis), vadiname tiesine lygtimi su vienu nežinomuoju.

3. Primenama, kad lygties sprendiniu vadinama nežinomojo reikšmė, su kuria lygtis tampa teisinga lygybe.
4. Pateikiama schema (ir išsprendžiami pavyzdžiai), iliustruojanti, kada lygtis $ax = b$ priklausomai nuo a ir b gali turėti vieną sprendinį, neturėti sprendinių arba turėti be galo daug sprendinių.



PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai uždaviniai yra 1–16. Nors 1 pratimas skirtas spręsti žodžiu, bet silpnesni mokiniai jį gali atlikti ir raštu. Sprendžiant 2 uždavinį prireikia panašiųjų narių sutraukimo bei atskliautimo taisyklių. 3 pratimą siūloma spręsti skaičiuokliu. Pateikiami tekstiniai uždaviniai, kurie sprendžiami sudarant lygtis (5–7, 10, 13, 16). Spręsdami lygtis kartu pakartosite ir greitosios daugybos formules (11, 12), ir modulio sąvoką (14), ir pagrindinę proporcijos savybę (7, 15). Patartina prisiminti trikampio kampų sumos, priekampio ir gretutinių kampų savybes (17), plotų skaičiavimus (18), trikampio lygumo požymius (19), veiksmus su laipsniais (22), procentus (24), taškų atidėjimą koordinačių plokštumoje (21). Kartojimui skirti ir 19, 20, 23, 25 uždaviniai. 1–20

1. a) 4; b) −5; c) 0; d) 2; e) 0;
f) sprendinių nėra; g) 20; h) 0; i) 2;
j) −5; 5 (randame skaičius, kuriuos pakėlę kvadratu gauname 25);
k) 25 (randame skaičių, iš kurio ištraukę kvadratinę šaknį gauname 5);
l) −1; 1 (pakartokite modulio apibrėžimą).

2. a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 2; d) sprendinių nėra; e) 4; f) 0; g) 5; h) sprendinių nėra.

3. a) 38,50; b) 29,20; c) −0,63; d) 3,19.

4. *Nurodymas.* Patogu abi lygties puses padauginti iš trupmenų bendro vardiklio. a) 36; b) $25\frac{5}{7}$; c) 9; d) $-115\frac{1}{2}$.

5. Tarkime, kad mažoji sesutė sveria x kg. Tada vyresnioji sesuo sveria $3x$ kg, o brolis — $2 \cdot 3x = 6x$ (kg). Pagal sąlygą sudarome lygtį: $x + 3x + 6x = 100$, $x = 10$.
Atsakymas. Mažoji sesutė sveria 10 kg.

6. Sakykime, kad mergaitei yra x metų. Tada mamai yra $3x$, o tėčiui — $(3x + 2)$ metai. Pagal sąlygą sudarome lygtį: $x + 3x + 3x + 2 = 100$, $x = 14$.
Atsakymas. Mergaitei yra 14 metų.

7. Sakykime, kad buvo paimta x g cinko. Patogu sudaryti proporciją: $3 : 2 = 420 : x$, $x = 280$.
Atsakymas. Buvo paimta 280 g cinko.

Uždavinį galima spręsti sudarant skaitinį reiškinį: $420 : 3 \cdot 2 = 280$ (g).

8. a) Sprendžiame lygtį $2x + 3x = 5005$, $x = 1001$; $2x = 2 \cdot 1001 = 2002$, $3x = 3 \cdot 1001 = 3003$.
b) 1820 ir 3185; c) 1155 ir 3850; d) 2145 ir 2860; e) 4004 ir 1001.
Nurodymas. Šį pratimą (kaip, beje, ir 9 pratimą) galima spręsti sudarant skaitinį reiškinį. Pavyzdžiui, e) $5005 : \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 4004$.
Vienas skaičius yra 4004, o kitą skaičių galima rasti dviem būdais: $5005 : \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 1001$ arba $5005 - 4004 = 1001$.

9. a) 354; 885; 1239; b) 1470; 588; 420.

10. *Nurodymas.* Uždavinys labai panašus į teorinėje dalyje išnagrinėtą 2 uždavinį. Tarkime, kad kuopoje yra a žmonių. Tada sargyboje yra $\frac{2}{5}a$, dirba $\frac{2}{7}a$, ligoninėje — $\frac{1}{4}a$ žmonių ir dar 27 žmonės yra čia pat. Sudarome lygtį: $\frac{2}{5}a + \frac{2}{7}a + \frac{1}{4}a + 27 = a$, $a = 420$.
Atsakymas. Kuopoje yra 420 žmonių.

11. a) −5; 5; b) $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$; c) −0,5; 0,5; d) −3; 3; e) $-1\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{3}$; f) $-4\frac{1}{2}$; $4\frac{1}{2}$; g) $-1\frac{1}{7}$; $1\frac{1}{7}$; h) $-1\frac{2}{3}$; $1\frac{2}{3}$; i) −100; 100.

Reikėtų pakartoti kvadratų skirtumo formulę $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ bei aptarti sąlygą, kada sandauga lygi nuliui.

12. a) 9; b) −2; c) 2; d) 2; e) −1; 1; f) −1; 1.

13. a) Tarkime, kad stačiakampio plotis yra y dm. Tada ilgis bus $2y$ dm. Stačiakampio ilgį padidinus 4 dm, o plotį sumažinus 5 dm kraštinių ilgiai atitinkamai bus $(2y + 4)$ dm ir $(y - 5)$ dm. Sudarome lygtį: $y \cdot 2y - 32 = (2y+4)(y-5)$, $y = 2$ dm. Vadinasi, stačiakampio ilgis yra $2 \cdot 2 = 4$ (dm), o plotis — 2 dm. Tikriname. (Primename, kad apskritai kalbant žodinių uždavinių sprendinius reikia tikrinti visada.) Sumažinę plotį 5 dm, gauname, kad naujojo stačiakampio kraštinė lygi $2 - 5 = -3$ (dm). Vadinasi, uždavinys sprendinių neturi.

Kad atsakymas tenkintų uždavinio sąlygą, vietoje 32 dm^2 turėtų būti 320 dm^2.

b) Šis pratimas, kaip ir punktas a), sprendinių neturi, nes pagal uždavinio sąlygą sudarę lygtį gautume: $(y - 24)(y - 3) + 14{,}4 = y^2$ ir $y = 3{,}2$ (dm). Naujojo stačiakampio kraštinės turėtų būti −20,8 dm ir 0,2 dm.
Atsakymas. a) Toks stačiakampis neegzistuoja; b) toks kvadratas neegzistuoja.

Kad uždavinys turėtų sprendinį, galima vietoje 24 m imti 2,4 m.

14. *Nurodymas.* Priminkite modulio apibrėžimą: realiojo skaičiaus a moduliu vadiname patį skaičių, kai $a \geqslant 0$, ir (jam priešingą skaičių) $-a$, kai $a < 0$.
a) $|x + 3| = 4$, todėl $x + 3 = 4$ ir $x + 3 = -4$, $x = 1$ ir $x = -7$;
b) 1; 7;
c) $|5 - x| = -4$. Pagal modulio savybę kairė pusė visada neneigiama, t. y. $|5 - x| \geqslant 0$. Vadinasi, lygtis sprendinių neturi;
d) $|7 + x| = 0$, todėl $7 + x = 0$, $x = -7$; e) 5; −5; f) sprendinių nėra.

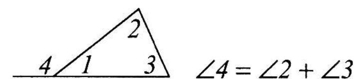
$|a| = a$, kai $a \geqslant 0$;
$|a| = -a$, kai $a < 0$.

15. *Nurodymas.* Prisiminkite pagrindinę proporcijos savybę: proporcijos kraštinių narių sandauga lygi jos vidurinių narių sandaugai.
a) 60; b) $1\frac{5}{9}$; c) 1; d) 550; e) $13\frac{8}{9}$; f) 0,054.

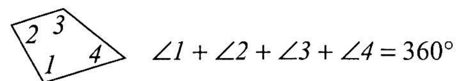
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

16. Tarkime, kad krepšelyje buvo x slyvų. Pirmajam valdovė davė $\frac{1}{2}x+1$, antrajam — $(x-(\frac{1}{2}x+1))\cdot\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$, trečiajam — $(x-((\frac{1}{2}x+1)+(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})))\cdot\frac{1}{2}+3 = \frac{1}{8}x + 2\frac{1}{4}$ slyvų. Kadangi slyvų krepšelyje neliko, tai reiškia, kad valdovė atidavė visas slyvas, t. y. $(\frac{1}{2}x + 1) + (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{8}x + 2\frac{1}{4}) = x$, $x = 30$.
Atsakymas. Krepšelyje buvo 30 slyvų.

17. a) Pritaikę trikampių kampų sumos ir gretutinių kampų savybes gauname: $x = 110°$.
Galima spręsti taikant ir trikampio priekampio savybę: trikampio priekampis lygus jam negretutinių kampų didumų sumai.



b) Keturkampio kampų suma lygi 360°, todėl kampui x gretutinis kampas lygus $360° - (90° \cdot 2 + 62°) = 118°$; $x = 180° - 118° = 62°$.

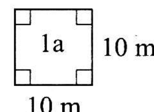


18. Figūrų plotams apskaičiuoti galima sudaryti įvairius skaitinius reiškinius, pavyzdžiui:
a) $S = 12 \cdot 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 = 78\,(\text{cm}^2)$; b) $S = 12 \cdot 8 - 8 \cdot 4 = 64\,(\text{cm}^2)$.

19. Galima rasti šios trikampės šukės vienos kraštinės ilgį ir du kampus prie jos. Tada remiantis trikampių lygumo požymiu galima nusibraižyti norimą trikampį. Beje, stiklius, matyt, jau seniai bus pamiršęs trikampio lygumo požymius. Greičiausiai jis panaudodamas liniuotę paprasčiausiai pratęs nuskelto kampo kraštines.

20. Reikia atkreipti dėmesį, kad sąlygoje duoti skirtingi matavimo vienetai: $10\,\text{a} = 1000\,\text{m}^2$. $0{,}7\,\text{m}^3$ kalkių sveria $600 \cdot 0{,}7 = 420\,(\text{kg})$. Kadangi į $1\,\text{m}^2$ sklypą beriama nuo 200 iki 400 g kalkių (t. y. nuo 0,2 kg iki 0,4 kg), tai į 10 a sklypą reikės berti nuo $0{,}2 \cdot 1000 = 200\,(\text{kg})$ iki $0{,}4 \cdot 1000 = 400\,(\text{kg})$ kalkių. Todėl 420 kg kalkių šiam sklypui pakaks.

1a = 100 m²



21. 1) $OA = OB = 4$.
2) $\triangle AOB$ — status lygiašonis.
3) Pagal brėžinio duomenis $AC = CB$, tai OC — pusiaukraštinė. $\triangle AOB$ lygiašonis ($AO = OB$). Pusiaukraštinė OC, nubrėžta į pagrindą, yra ir aukštinė. Vadinasi, $OC \perp AB$. Todėl OC yra atstumas nuo taško O iki tiesės AB.
4) $\triangle AOB$ — status, tai taikydami Pitagoro teoremą gauname:
$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 4^2 + 4^2 = 2 \cdot 4^2$, $AB = \sqrt{2 \cdot 4^2} = 4\sqrt{2}$.
5) $\triangle OCB$ status, tai $OC^2 + CB^2 = OB^2$. Kadangi $CB = \frac{AB}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, tai $OC^2 = OB^2 - CB^2 = 4^2 - (2\sqrt{2})^2 = 8$, $OC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
(Galima pastebėti, kad $\triangle OCB$ status lygiašonis, nes $\angle OBA = 45°$ ir $OC = CB = 2\sqrt{2}$; arba $AO \cdot BO = AB \cdot OC$.)
6) $C(x, y)$, kur $x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$; $y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$.

22. a) $-0{,}08$; b) -4; c) 5; d) 4.

23. Ridenamų dviejų skirtingų spalvų lošimo kauliukų visas galimas baigtis užrašykime lentelėje (tai jau buvo daroma sprendžiant vadovėlio I dalies 510 uždavinį):
a) (4, 6); (5, 5); (6, 4);
b) (1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1); (4, 6); (5, 5); (6, 4).

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

24. a) $\frac{87{,}5}{2500} \cdot 100 = 3{,}5(\%)$; b) $\frac{200}{3} \cdot 100 = 6666\frac{2}{3} \approx 6666{,}67\,(\text{Lt})$.

25. *I būdas.* Nesunku atlikti perranką. Grupių po 4 vaikus skaičius turi būti kuo didesnis, tai grupių po 7 vaikus turi būti kuo mažiau. Pastebėkime, kad turi būti grupių po 7 vaikus: jei jų nebūtų, tai 117 vaikų negalėtume paskirstyti į grupes po 4, nes 117 iš 4 nesidalija. Būti 1 grupė po 7 vaikus negali, nes liktų 110 vaikų, o 110 iš 4 nesidalija. Negali būti ir 2 grupės po 7 vaikus, nes liktų 103 vaikai. O štai 3 grupės būti gali, liktų 96 vaikai, ir juos galima suskirstyti į $96 : 4 = 24$ grupes.

II būdas. Raskime visus galimus vaikų pasiskirstymus. Tam reikia išspręsti natūraliaisiais skaičiais lygtį $n \cdot 7 + m \cdot 4 = 117$. Kadangi n gali būti tik nelyginis, tai $n = 2k - 1$. Įstatę šią išraišką į lygtį turime: $14k - 7 + 4m = 117$, $14k + 4m = 124$, $7k + 2m = 62$. Dabar matome, kad k turi būti lyginis, t. y. $k = 2t$. Įstatę turime: $14t + 2m = 62$, $7t + m = 31$, $m = 31 - 7t$. Taigi t gali įgyti reikšmes 1, 2, 3 ir 4; m atitinkamai 24, 17, 10 ir 3. Atitinkamai iš pradinės lygties n gali įgyti reikšmes 3, 7, 11 ir 15. Taigi $(m; n)$ gali būti tokie: (24; 3), (17; 7), (10; 11), (3; 15). Matome, kad daugiausia grupių po 4 vaikus gali būti 24.
Atsakymas. **D.**

7.2. Skaičių ir reiškinių palyginimas

Palyginti skaičius buvo mokoma jau nuo pirmųjų klasių. Pradinėse klasėse reikėjo palyginti teigiamuosius skaičius, 5 klasėje — dešimtaines trupmenas, 6 — paprastąsias trupmenas su vienodais ir su skirtingais vardikliais, 7 — teigiamuosius ir neigiamuosius skaičius, iracionaliuosius skaičius, laipsniais užrašytus skaičius. Skaičiai buvo lyginami remiantis skaičių tiese ir moduliu. Šiame skyrelyje pateikiamas palyginimo būdas vadinamas skirtumo ženklo nustatymo būdu, t. y. apskaičiuojamas skaičių skirtumas ir nustatoma, ar jis teigiamas, ar neigiamas, ar lygus nuliui.

Šis būdas labai praverčia lyginant raidinius reiškinius, įrodinėjant nelygybes ir kt. Šio skyrelio pagrindinis tikslas — prisiminti palyginimo sąvokas: daugiau, mažiau, daugiau arba lygu, mažiau arba lygu; mokytis sąlygą užrašyti nelygybe.

Pakartoti:

palyginimo sąvokas: daugiau, mažiau, daugiau arba lygu ir mažiau arba lygu;

įvairių skaičių palyginimą remiantis skaičių tiese ir moduliu.

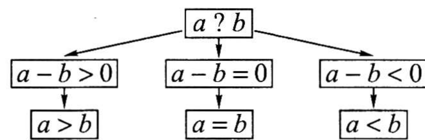
Išmokti palyginti skaičius ar reiškinius apskaičiuojant jų skirtumą.

Šiame skyrelyje:

1. Panagrinėjama reali, gyvenimiška situacija. Ja norima parodyti, kad gyvenime dažnai tenka palyginti skaičius. Ši situacija plačiau bus nagrinėjama 5 skyrelyje — „Nelygybių sprendimas".
2. Primenama, kad kuo skaičius didesnis, tuo dešiniau skaičių tiesėje yra atitinkantis jį taškas.
3. Pateikta 1 užduotis siekiant pakartoti paprastųjų ir dešimtainių trupmenų palyginimą.
4. Parodomas universalesnis skaičių palyginimo būdas: apskaičiuojamas skaičių skirtumas ir nustatoma, ar jis yra teigiamas, ar neigiamas, ar lygus nuliui.

Skaičius a didesnis už skaičių b, jei skirtumas $a - b$ yra teigiamas. Skaičius a mažesnis už skaičių b, jei skirtumas $a - b$ yra neigiamas. Skaičius a lygus skaičiui b, jei skirtumas $a - b$ yra lygus nuliui.

Pastabos. 1) Su šiuo skaičių palyginimo būdu buvo susipažinta 7 klasėje (Matematika 7, I dalis, 27 p.). Bet uždavinių šiam būdui pritaikyti nebuvo pateikta.
2) Siūlome su mokiniais panagrinėti schemą:



Paprašykite mokinių nusakyti, ką mato schemoje.

5. Išnagrinėti du uždaviniai: 1) kaip palyginti skaičius, kai žinomas jų skirtumas; 2) kaip įsitikinti, kad su kiekviena kintamojo reikšme nelygybė yra teisinga.

   Pastaba. Ypač svarbu su mokiniais išnagrinėti 2 uždavinį, nes ir uždavinio formulavimas, ir sprendimas yra mokiniams nematyti ir nelengvai suprantami.
6. Smulkesniu šriftu pateikta medžiaga apie dviejų skaičių sąryšius skirta stipresniems mokiniams.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 26–36 pratimai: reiškiniams palyginti nustatant jų skirtumo ženklą (26–32) ir skaitinių reiškinių reikšmėms palyginti (33–36). Kiti uždaviniai — kartojimo. Siūloma pakartoti veiksmus su laipsniais (36), dviejų narių sumos (skirtumo) formulę (37), skritulinės diagramos braižymą (38), procentus (39), vienanarių daugybą (40), Pitagoro teoremą ir atstumą tarp dviejų taškų (42), trikampio kampų bei kampų, gautų dvi lygiagrečias tieses perkirtus trečiąja, savybes (43), mastelį (44). 21–31

26. a) $a < b$; b) $a = b$; c) $a > b$.

27. Skirtumas $m - n$ gali būti lygus:
a) 2,3; b) 4 arba 0.

28. Pirmiausia į reiškinius $2a(a - 4)$ ir $(a - 2)(2a - 4)$ vietoj kintamojo a įrašę duotas a reikšmes nustatome, kad visais atvejais $2a(a - 4) < (a - 2)(2a - 4)$, t. y. kai $a = 6$, tai:
$2a(a - 4) = 2 \cdot 6(6 - 4) = 24$; $(a - 2)(2a - 4) = (6 - 2) \cdot (2 \cdot 6 - 4) = 32$; $24 < 32$; kai $a = -4$, tai $64 < 72$; kai $a = 0$, tai $0 < 8$.
Aišku, daryti apibendrinančią išvadą, kad nelygybė $2a(a - 4) < (a - 2)(2a - 4)$ yra teisinga su visomis kintamojo a reikšmėmis, dar anksti. Įrodyti, kad nelygybė teisinga su visomis a reikšmėmis, galima apskaičiavus duotų reiškinių skirtumą: $2a(a-4) - (a-2)(2a-4) = -8$. Kadangi $-8 < 0$, tai $2a(a-4) <$ $< (a - 2)(2a - 4)$ su kiekviena a reikšme.

29. Sprendimas analogiškas 28 uždavinio sprendimui.
Kai $x = 0{,}5$, tai $6{,}25 > -33{,}75$; kai $x = -\frac{1}{5}$, tai $-1\frac{4}{5} > -41\frac{4}{5}$; kai $x = 0$, tai $0 > -40$. $5x(x+2) - (5x-10)(x+4) = 40$. Kadangi $40 > 0$, tai $5x(x+2) > (5x-10)(x+4)$ su kiekviena x reikšme.

30. Apskaičiavę reiškinių skirtumus gauname:
a) -6; b) 7;
c) $(2x-3)(x-3)-(x-1)(x-8) = 2x^2-6x-3x+9-x^2+8x+x-8 = x^2+1$.
Su kiekviena x reikšme reiškinys $x^2+1 > 0$, todėl $(2x-3)(x-3) > (x-1)(x-8)$;
d) $(5-x)(7+2x)-(2-x)(1+2x) = 35+10x-7x-2x^2-2-4x+x+2x^2 = 33$;
$33 > 0$, todėl $(5-x)(7+2x) > (2-x)(1+2x)$ su kiekviena x reikšme.
Vadinasi, sąlygoje pateikta nelygybė yra *neteisinga* su kiekviena x reikšme.

31. Apskaičiavę reiškinių skirtumus gauname:
a) $2y-20$; b) 23; c) y; d) $20y^2+4$.
Matome, kad punkte a) $2y-20$ gali būti tiek didesnis už 0 (kai $y > 10$), tiek lygus nuliui (kai $y = 10$), tiek mažesnis už nulį (kai $y < 10$), todėl duotoji nelygybė ne visada teisinga. Punkte c), kai $y > 0$ ir kai $y = 0$, nelygybė yra neteisinga. Nelygybė yra teisinga, kai $y < 0$. Punkte d) su kiekviena y reikšme $20y^2+4 > 0$.
Atsakymas. Su kiekviena y reikšme teisingos yra b) ir d) punktų nelygybės. Punktų a) ir c) nelygybės nėra teisingos su kiekviena y reikšme.

32. Prie kiekvieno iš duotųjų skaičių pridėję skaičių m gauname $m-1$, m, $m+1$, $m+2$. Kraštinių skaičių sandauga yra $(m-1)\cdot(m+2)$, o vidurinių — $m\cdot(m+1)$. Norėdami palyginti šiuos reiškinius randame jų skirtumą: $(m-1)(m+2) - m\cdot(m+1) = -2$. Matome, kad skirtumas nepriklauso nuo m reikšmės ir yra neigiamas, todėl $(m-1)(m+2) < m(m+1)$ su kiekviena m reikšme.

33. *Nurodymas.* Prieš sprendžiant šį uždavinį reikėtų pakartoti vienas kitam atvirkštinių skaičių apibrėžimą: du skaičiai, kurių sandauga lygi vienetui, vadinami atvirkštiniais skaičiais. Be to, prisiminkite, kad pasakymas „ne mažesnis už 2" reiškia, kad reiškinys yra didesnis už 2 arba lygus 2.

$a\cdot\frac{1}{a} = 1$, kai $a \neq 0$.

Teigiamąjį skaičių pažymėkime m ($m > 0$). Jam atvirkštinis skaičius bus $\frac{1}{m}$.
Užrašome nelygybę: $m + \frac{1}{m} \geqslant 2$. Mokiniams pasiūlykite m reikšmėmis pasirinkti ir natūraliuosius, ir trupmeninius, ir mišriuosius skaičius. Atkreipkite dėmesį į tai, kad nelygybė teisinga tik teigiamiesiems skaičiams.
Galima pasiūlyti mokiniams įrodyti nelygybę $m + \frac{1}{m} \geqslant 2$, kai $m > 0$:
$m + \frac{1}{m} - 2 = \frac{m^2+1-2m}{m} = \frac{(m-1)^2}{m}$.
Patebėkime, kad gautos trupmenos vardiklis yra didesnis už nulį (duota sąlygoje), o skaitiklis didesnis arba lygus nuliui (lygus nuliui, kai $m = 1$). Vadinasi, $\frac{(m-1)^2}{m} \geqslant 0$, kai $m > 0$, taigi ir $m + \frac{1}{m} - 2 \geqslant 0$. Tai reiškia, kad $m + \frac{1}{m} \geqslant 2$.

34. *Nurodymas.* Pirmiausia reikėtų pasirinkti tokias a ir b reikšmes, kad $\sqrt{ab}$ reikšmę galima būtų rasti be skaičiuoklio, pavyzdžiui, kai $a = 3$, $b = 27$, tai $\frac{a+b}{2} = \frac{3+27}{2} = 15$; $\sqrt{ab} = \sqrt{3\cdot 27} = 9$; $15 > 9$.
Stipresniems mokiniams reikėtų įrodyti nelygybę $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Matome, kad gautos trupmenos skaitiklis didesnis arba lygus nuliui (lygus nuliui, kai $\sqrt{a} = \sqrt{b}$). Vadinasi, $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqslant 0$, t. y. $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

35. a) $2{,}8 - 3\cdot(-4{,}2) = 15{,}4$; $(2{,}8-3)\cdot(-4{,}2) = 0{,}84$; $15{,}4 > 0{,}84$;
b) $-5\cdot 1{,}25 + 10{,}25 = 4$; $-5(1{,}25+10{,}25) = -57{,}5$; $4 > -57{,}5$;
c) $\frac{0{,}2\cdot 0{,}0032\cdot 0{,}15}{0{,}08\cdot 0{,}5} = \frac{3}{1250}$; $\frac{0{,}3\cdot 0{,}048\cdot 0{,}17}{0{,}51\cdot 0{,}0016\cdot 0{,}9} = 3\frac{1}{3}$; $\frac{3}{1250} < 3\frac{1}{3}$.
Pastaba. Skaičiuodami trupmenų reikšmes taikykite pagrindinę trupmenos savybę, pvz.: $\frac{0{,}2\cdot 0{,}0032\cdot 0{,}15}{0{,}08\cdot 0{,}5} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}0032\cdot 0{,}15\cdot 1000}{0{,}08\cdot 0{,}5\cdot 1000} = \frac{2\cdot 15\cdot 0{,}0032}{8\cdot 5} = \frac{3\cdot 0{,}0032}{4} = 3\cdot 0{,}0008 = 0{,}0024$.

36. a) $2^{10} \cdot 5^9 = 2 \cdot 2^9 \cdot 5^9 = 2 \cdot (2 \cdot 5)^9 = 2 \cdot 10^9$;
$2 \cdot 10^9 > 10^9$, tai $2^{10} \cdot 5^9 > 10^9$.
b) $14^{11} = 14 \cdot 14^{10}$; $2^{10} \cdot 7^{12} = 2^{10} \cdot 7^{10} \cdot 7^2 = (2 \cdot 7)^{10} \cdot 7^2 = 14^{10} \cdot 7^2$;
$14 \cdot 14^{10} < 49 \cdot 14^{10}$, tai $14^{11} < 2^{10} \cdot 7^{12}$.
c) $6^{15} = 6^3 \cdot 6^{12} = 216 \cdot 6^{12}$; $2^{16} \cdot 3^{12} = 2^4 \cdot 2^{12} \cdot 3^{12} = 2^4 \cdot (2 \cdot 3)^{12} =$
$= 2^4 \cdot 6^{12} = 16 \cdot 6^{12}$; $216 \cdot 6^{12} > 16 \cdot 6^{12}$, tai $6^{15} > 2^{16} \cdot 3^{12}$.
d) $5^{11} \cdot 6^{13} = 5^{11} \cdot 6^{11} \cdot 6^2 = (5 \cdot 6)^{11} \cdot 6^2 = 30^{11} \cdot 6^2 = 36 \cdot 30^{11}$; $30^{12} = 30 \cdot 30^{11}$;
$36 \cdot 30^{11} > 30 \cdot 30^{11}$, tai $5^{11} \cdot 6^{13} > 30^{12}$.

Pasiūlykite mokiniams surasti pavyzdyje paliktą korektūros klaidą: vietoje 15^4 turi būti 15^{14} (du kartus).

37. a) $9 + 6a + a^2$; b) $x^2 - 16x + 64$;
c) $4y^2 - 40xy + 100x^2$; d) $49m^2 + 84mn + 36n^2$.

38. Skaito 20% žmonių, t. y. $\frac{300}{100} \cdot 20 = 60$ (žmonių). Skritulinėje diagramoje išpjovos, vaizduojančios skaitančiuosius, kampas lygus $360° : 300 \cdot 60 = 72°$. Galima samprotauti ir taip: 20% sudaro $\frac{1}{5}$ pilnutinio kampo, t. y. $360° \cdot \frac{1}{5} = 72°$.
Atsakymas. Išpjovos kampas lygus 72°.

39. *Nurodymas.* Šį pratimą siūloma atlikti naudojantis skaičiuokliu.
a) 111; b) $\frac{37}{111} = \frac{1}{3}$; c) $\approx 68\%$; d) 5 mergaitėmis daugiau; $\approx 9\%$.

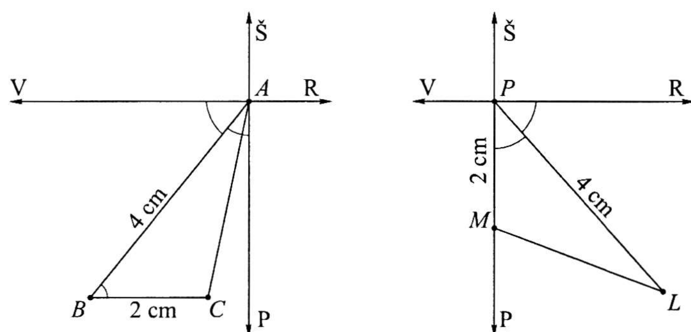
40. a) $8x^2y$; 0,224;
b) $25y^{-1}$; 125 (pastebėkite, kad reiškinio reikšmė nepriklauso nuo x reikšmės).

41. Stačiakampio gretasienio išklotinės pavaizduotos a) ir b) punktuose.

42. Pavaizduotų atkarpų ilgius galima rasti dvejopai:
I būdas. Papildykite brėžinį, kaip parodyta vadovėlyje prie atkarpos AB, sudarydami statųjį trikampį ir pagal Pitagoro teoremą apskaičiuokite AB:
$AB = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}$.
II būdas. Pažymėkite taškų A ir B koordinates, t. y. $A(-3; 7)$, $B(4; 9)$, ir pritaikykite atstumo tarp dviejų taškų radimo formulę, kai duotos taško koordinatės:
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4+3)^2 + (9-7)^2} = \sqrt{53}$;
$CD = 5\sqrt{2}$; $EF = 10$; $KL = 2\sqrt{5}$; $MN = 4$.

43. a) $\triangle BCD$ — lygiašonis ($BC = CD$), tai $\angle x = \frac{180° - 28°}{2} = 76°$;
$\triangle BAD$ — lygiašonis ($BA = AD$), tai $\angle y = 180° - 2 \cdot 43° = 94°$.
b) $BC \parallel AD$, AE — kirstinė, tai $\angle EAD = \angle BEA = 18°$ (vidaus priešiniai kampai). $AB \parallel CD$, AD — kirstinė, tai $\angle BAD + \angle CDA = 180°$ (vidaus vienašaliai kampai), $\angle BAD = 180° - 116° = 64°$. $\angle BAD = \angle x + \angle EAD$, tai $\angle x = 64° - 18° = 46°$. $AB \parallel CD$, AE — kirstinė, tai $\angle x + \angle y = 180°$ (vidaus vienašaliai kampai), tai $\angle y = 180° - 46° = 134°$.

44. Reikėtų aptarti, kaip žymimos kryptys šiaurė, pietūs, rytai, vakarai, pietryčiai ir pietvakariai, ir pagal duotą mastelį nusibraižyti brėžinį.



Nagrinėjame $\triangle ABC$ ir $\triangle LPM$. $AB = PL = 4$ cm, $BC = MP = 2$ cm, $\angle ABC = \angle MPL = 45°$, tai $\triangle ABC = \triangle LPM$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų).

7.3. Skaitinių nelygybių savybės

Tai nauja teorinė medžiaga. Sprendžiant nelygybes, kaip ir lygtis, reikia mokėti jas pertvarkyti, t. y. prie abiejų pusių pridėti, atimti, abi puses dauginti, dalyti iš to paties skaičiaus ar reiškinio. Tam reikia žinoti nelygybių savybes. Nelygybių savybės vadovėlio teorinėje dalyje nėra įrodomos. Jos atrandamos panagrinėjus paprasčiausias skaitines nelygybes. Svarbiausia, kad mokiniai įsisąmonintų, jog dauginant (dalijant) abi nelygybės puses iš *neigiamojo* skaičiaus nelygybės ženklas keičiasi priešingu.

Pakartoti veiksmus su teigiamaisiais ir neigiamaisiais skaičiais.

Išmokti skaitinių nelygybių savybes. Jei $a \wedge b$, tai:

I. $a + c \wedge b + c$, $\quad a - c \wedge b - c$;

II. $a \cdot c \wedge b \cdot c$, $\quad \dfrac{a}{c} \wedge \dfrac{b}{c}$ $\quad (c > 0)$;

III. $a \cdot c \vee b \cdot c$, $\quad \dfrac{a}{c} \vee \dfrac{b}{c}$ $\quad (c < 0)$.

Pastaba. Čia ženklai $\wedge$ ir $\vee$ žymi vienas kitam priešingus nelygybės ženklus.

Šiame skyrelyje:

1. Paėmus akivaizdžiai teisingą skaitinę nelygybę įsitikinama, kad prie abiejų nelygybės pusių pridėjus (arba atėmus) tą patį skaičių gaunama teisinga skaitinė nelygybė. Mokiniams siūloma atlikti tą pačią užduotį su kita skaitine nelygybe. Tada formuluojama savybė:

> *Prie teisingos skaitinės nelygybės abiejų pusių pridėję (arba atėmę) tą patį skaičių gauname teisingą nelygybę.*

2. Analogiškai įsitikinama, kad:

> *Teisingos skaitinės nelygybės abi puses padauginę (arba padaliję) iš to paties teigiamojo skaičiaus gauname teisingą nelygybę.*

Pastaba. Atkreipkite dėmesį į piešinį.

3. Svarbiausia yra trečioji nelygybės savybė:

> *Teisingos skaitinės nelygybės abi puses dauginant (arba dalijant) iš to paties neigiamojo skaičiaus nelygybės ženklas keičiasi priešingu.*

Pastaba. Ir vėl būtų gerai panagrinėti piešinį. Mokiniai dažnai klysta keisdami nelygybės ženklą, pavyzdžiui,

rašo taip:	turi būti:
$6 < 8$,	$6 < 8$,
$6 \cdot (-2) < 8 \cdot (-2)$,	$6 \cdot (-2) > 8 \cdot (-2)$,
$-12 > -16$,	$-12 > -16$.

4. Paskutinėje užduotyje pateikiamos dvi raidėmis užrašytos nelygybės savybės. Trečiąją savybę turi užrašyti mokiniai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 45–51 pratimai. Siūloma pakartoti skaičių palyginimą nustatant jų skirtumo ženklą (52), veiksmus su laipsniais (54), veiksmus su trupmenomis (53), dvinario kėlimą kvadratu (55), reiškinių prastinimą (59) bei skaidymą daugiklaisiais (56), tapatybės sąvoką (57), lygčių sprendimą (58), medianos ir vidurkio skaičiavimus (60), kampus prie lygiagrečių tiesių (61), rombo plotą (62), Pitagoro teoremą ir trikampio plotą (63). 34–41

45. a) $14 > -20$; $27{,}5 > -6{,}5$; $26\frac{1}{3} > -7\frac{2}{3}$;
b) $-9 < 9$; $-2{,}5 < 15{,}5$; $-9\frac{2}{5} < 8\frac{3}{5}$;
c) $54 > -60$; $-36 < 40$; $-9 < 10$; $5{,}4 > -6$;
d) $6 > -2$; $-216 < 72$; $-3 < 1$; $72 > -24$.

46. a) $m + 4 > n + 4$; $m - 6 > n - 6$;
b) $m - 9 > n - 9$; $m + 2 > n + 2$;
c) $4m > 4n$; $-2m < -2n$; $-\frac{m}{3} < -\frac{n}{3}$; $0{,}4m > 0{,}4n$;
d) $\frac{m}{5} > \frac{n}{5}$; $-m < -n$; $\frac{3m}{2} > \frac{3n}{2}$; $4m > 4n$.

47. a) $1{,}2a < 1{,}2b$, nes abi nelygybės puses dauginome iš $1{,}2 > 0$;
b) $-100a > -100b$, nes abi nelygybės puses dauginome iš $-100 < 0$;
c) $\frac{a-10}{3} < \frac{b-10}{3}$, nes atėmėme 10 ir padalijome iš $3 > 0$;
d) $-\frac{a}{11} > -\frac{b}{11}$, nes padalijome iš $-11 < 0$.

48. a) $m > 0$; b) $m < 0$; c) $m < 0$; d) $m < 0$.

49. a) Kiekvieną nelygybės narį padauginame iš 2: $10 < 2a < 12$.
b) Kiekvieną nelygybės narį padauginkime iš -1. Dauginant iš neigiamojo skaičiaus nelygybės ženklas keičiasi priešingu, todėl $-6 < -a < -5$.
c) Pridėkime prie kiekvieno nelygybės nario 2,5: $7{,}5 < a + 2{,}5 < 8{,}5$.
d) Padauginkime kiekvieną nelygybės narį iš -1, po to pridėkime 3,1: $-2{,}9 < 3{,}1 - a < -1{,}9$ (pasinaudokite b) punktu).
e) Padauginkime kiekvieną nelygybės narį iš 3, po to pridėkime 4: $19 < 3a + 4 < 22$.

Mokiniai pirmą kartą susiduria su reiškinių įvertinimu, todėl reikia panagrinėti vadovėlyje pateiktą pavyzdį.

50. Lygiakraščio trikampio perimetras $P = 3a$ cm.
a) Kai $2{,}5 < a < 2{,}6$, tai $7{,}5 < 3a < 7{,}8$. Vadinasi, $7{,}5 < P < 7{,}8$;
b) kai $5\frac{1}{3} < a < 5\frac{1}{2}$, tai $16 < 3a < 16{,}5$. Vadinasi, $16 < P < 16{,}5$.

51. a) $8{,}24 < 2\sqrt{17} < 8{,}26$; b) $-2{,}065 < -0{,}5\sqrt{17} < -2{,}06$;
c) $4{,}84 < \sqrt{17} + 0{,}72 < 4{,}85$; d) $-1{,}73 < 2{,}4 - \sqrt{17} < -1{,}72$.

Vadovėlyje yra korektūros klaida. Turi būti $4{,}12 < \sqrt{17} < 4{,}13$.

52. a) Kadangi $x - y = 2{,}3$, o $2{,}3 > 0$, tai $x > y$; b) $x < y$; c) $x = y$.

53. *Nurodymas.* Taikykite pagrindinę trupmenos savybę.
a) $\frac{\frac{4}{15}\cdot 3\frac{3}{4}}{1{,}2} + \frac{1\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{7}}{1{,}5} = \frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}5} = \frac{10}{12} + \frac{10}{15} = \frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{9}{6} = 1\frac{1}{2}$;
b) $\frac{49}{60}$; c) $1\frac{35}{72}$; d) $1\frac{8}{27}$.

54. Palyginti skaičius galima dvejopai, pavyzdžiui:
a) $5^{10} = 5^1 \cdot 5^9$, tai $5 \cdot 5^9 > 4 \cdot 5^9$ ir $5^{10} > 4 \cdot 5^9$; mažesnis yra $4 \cdot 5^9$;
arba: $5^{10} - 4 \cdot 5^9 = 5^9 \cdot 5 - 4 \cdot 5^9 = 5^9 \cdot (5 - 4) = 5^9 > 0$, tai $5^{10} > 4 \cdot 5^9$;
Atsakymas. a) $4 \cdot 5^9$; b) lygūs; c) lygūs; d) $(-3)^{21}$.

55. a) $4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4$; b) $9p^6 + 12p^3q^2 + 4q^4$;
c) $\frac{4}{9}m^2x^2 + \frac{4}{5}mxy + \frac{9}{25}y^2$; d) $\frac{4}{25}q^2 - \frac{4}{7}qbc + \frac{25}{49}b^2c^2$.

56. a) $2mn^2(4m + 5)$; b) $6x^2y^2(xy - 2)$;
c) $9y^3(2x - y)$; d) $3a^3b^3(1 + 5ab)$.

57. *Nurodymas.* Norint įsitikinti, ar lygybė yra tapatybė, reikia pertvarkyti kairę ir dešinę lygybių puses ir jas palyginti.
a) $(x + 6)(x - 7) + x = x^2 - 42$; $(x + 5)(x - 5) - 17 = x^2 - 42$. Lygybė $(x + 6)(x - 7) + x = (x + 5)(x - 5) - 17$ yra tapatybė.
b), c) ir d) punktų lygybės nėra tapatybės.

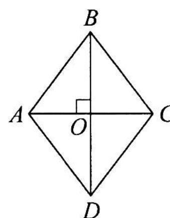
58. a) $\frac{2}{5}(4 + x) = 6$, tai $4 + x = \frac{6\cdot 5}{2}$, $4 + x = 15$ ir $x = 11$;
b) 22; c) 3,5; d) 10; e) $\frac{2}{3}$; f) $1\frac{1}{2}$.

59. a) $18xy^2$; b) $-10a^2b^3$; c) $-6a^6$; d) $-10m^6$.

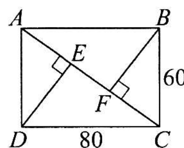
60. a) $\frac{4+8+8+6+10+12+6}{7} = 7\frac{5}{7}$;
b) užrašome duotus skaičius variacine eilute: 4, 6, 6, 8, 8, 10, 12. Kadangi imties dydis yra nelyginis skaičius, tai mediana yra variacinės eilutės vidurinysis skaičius, t. y. 8.

61. a) Randame kampą AED: $\angle AED = 180° - 140° = 40°$. Tada $\angle ADE = 180° - (72° + 40°) = 68°$. Kadangi $\angle ADE = \angle ABC = 68°$, o tai yra atitinkamieji kampai prie tiesių BC ir DE bei jų kirstinės AB, tai tiesės BC ir DE yra lygiagrečios.
b) $\angle BDE = 180° - \angle ADE = 180° - 68° = 112°$.

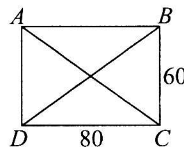
62. Rombo įstrižainę AC patogu pažymėti $3x$. Tada įstrižainė BD bus $4x$. $S_{ABCD} = \frac{3x\cdot 4x}{2} = 6x^2$ ir $x^2 = 242$. Iš stačiojo $\triangle AOB$ pagal Pitagoro teoremą $AB^2 = AO^2 + OB^2 = (\frac{1}{2}AC)^2 + (\frac{1}{2}BD)^2 = (\frac{3x}{2})^2 + (\frac{4x}{2})^2 = 2{,}25x^2 + 4x^2 = 6{,}25x^2 = 6{,}25 \cdot 242 = 1512{,}5$; $AB = \sqrt{1512{,}5} = 38{,}8908... \approx 38{,}9$ (m). $P_{ABCD} = 4AB \approx 4 \cdot 38{,}9 = 155{,}6$ (m), todėl reikės $155{,}6 : 5 = 31{,}12$ (medelio), t. y. 32 medelių.



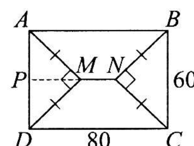
63. a) Bendras keliukų ilgis yra $AC + DE + BF$. $\triangle ADC$ — status, tai $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100$ (m). $S_{\triangle ADC} = \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{80\cdot 60}{2} = 2400$ (m^2) ir $S_{\triangle ADC} = \frac{DE\cdot AC}{2}$, tai $2400 = \frac{DE\cdot 100}{2}$, $DE = 48$ (m). Kadangi $\triangle ADC = \triangle CBA$, tai $DE = BF = 48$ (m). Visų keliukų ilgis yra $100 + 48 + 48 = 196$ (m).



b) Bendras keliukų ilgis yra $AC + BD$. Kadangi $AC = BD = 100$ (m), tai $AC + BD = 200$ (m).



c) $\triangle NBC$ — status lygiašonis, tai $NB^2 + NC^2 = BC^2$ ir $NB = NC = 30\sqrt{2}$ (m). Analogiškai $AM = MD = 30\sqrt{2}$ (m). $MN = 80 - 2PM$. $S_{\triangle AMD} = \frac{AM\cdot MD}{2} = \frac{30\sqrt{2}\cdot 30\sqrt{2}}{2} = 900$ (m^2) ir $S_{\triangle AMD} = \frac{PM\cdot AD}{2}$. Todėl $\frac{PM\cdot AD}{2} = 900$ ir $PM = 30$ (m). Tada $MN = 80 - 2 \cdot 30 = 20$ (m). Visų keliukų ilgis yra $20 + 4 \cdot 30\sqrt{2} = 20 + 120\sqrt{2}$. Randame apytikslę reiškinio $20 + 120\sqrt{2}$ reikšmę: $20 + 120\sqrt{2} \approx 189{,}7$ (m).



Atsakymas. Bendras keliukų ilgis mažiausias c) atveju.
Pastaba. Pats trumpiausias keliukų ilgis bus, jei kampą AMD imtume lygų 120°. Tada jis bus $80 + 60\sqrt{3} \approx 184$ (m). Apie tai galima pasiskaityti knygoje „Kelionės į šiuolaikinę matematiką".

7.4. Skaičių intervalai

Jau 7 klasėje buvo mokoma paprasčiausių nelygybių sprendinius pavaizduoti skaičių tiesėje, intervalo galus, kurie yra nelygybės sprendiniai, žymėti skaičių tiesėje užtušuotu tašku (•), o intervalo galus, kurie nėra sprendiniai — neužtušuotu tašku (○). Šiame skyrelyje mokoma nelygybės sprendinius užrašyti intervalu. *Intervalo* sąvoka ir intervalo žymėjimas skliaustais ( ) bei [ ] nėra visiškai nauja medžiaga (su ja susipažinome, kai grupavome duomenis į intervalus (Matematika 8, I dalis, 151–152 p.)). Šiame skyrelyje pirmą kartą susiduriama su *begalinio intervalo* sąvoka ir žymėjimu.

Pakartoti:

sąvokas ir ženklus ∈, ∉ (priklauso, nepriklauso);
paprasčiausių nelygybių sprendinių vaizdavimą skaičių tiesėje;
pažymėtos skaičių tiesės dalies užrašymą nelygybe.

Išmokti:

pavaizduoti skaičių tiesėje intervalus;
pažymėtą skaičių tiesės dalį užrašyti intervalu;
nelygybės sprendinius užrašyti intervalu;
perskaityti užrašytą intervalą.

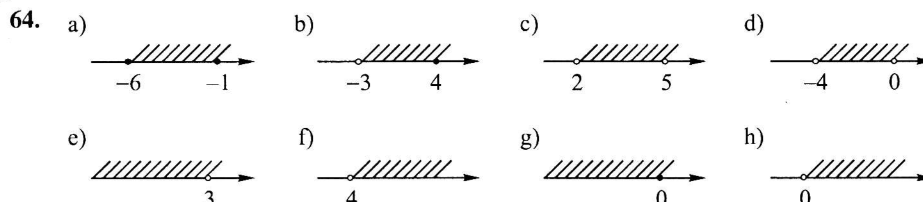
Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiu aiškinama skaičių intervalo sąvoka.
2. Mokoma nelygybę ir ją atitinkančią skaičių tiesės dalį užrašyti intervalu ir jį perskaityti.
3. Pateikta lentelė su pavyzdžiais, kur parodoma, kaip vaizduojami nelygybių sprendiniai skaičių tiesėje, kaip jie užrašomi intervalu ir kaip tas intervalas skaitomas.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 64–72 pratimai. Nei vadovėlyje, nei uždavinyne nėra užduočių, prašančių pavaizduotą skaičių tiesės dalį arba nelygybės sprendinius parašyti intervalu. Todėl patartume papildyti 65, 66 ir 72 uždavinių sąlygas. Pakartoti siūloma nelygybių savybes (73), dvinario kėlimą kvadratu (74), lygčių su moduliu sprendimą (75), tapatybės sąvoką (76), aritmetinį vidurkį (77, 82), statistikos pradmenis (80) bei įvairius geometrinius uždavinius (78, 81, 83, 84, 85). 42–49

64.

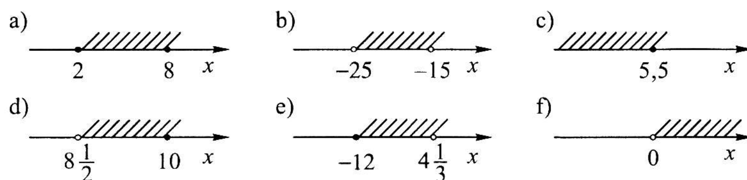


65. a) $-1 \leqslant x \leqslant 4$; b) $x < 5$; c) $3\frac{1}{2} < x \leqslant 1$; d) $x \geqslant 11$; e) $-100 < x < 100$; f) $0 \leqslant x < 4,1$.

Papildykite sąlygą: „Pažymėtą skaičių tiesės dalį užrašykite nelygybe ir intervalu“.

66. *Nurodymas.* Šiame pratime prie skaičių tiesės rodyklės patartina žymėti x, nes tai — nelygybės su kintamuoju x sprendiniai.

Papildykite sąlygą: „Nelygybės sprendinius užrašykite intervalu“.



67. a) $-5; 0; 11,4 \in (-6; 11,5)$;
b) $-7,5; -7,2; -7; 0 \in [7,5; 2,3]$.

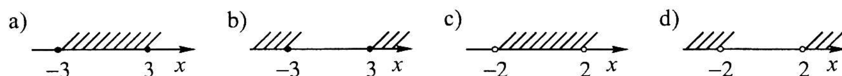
68. a) $-3,7; -2\frac{1}{8}; -1$; b) $-1; 0; 4; 7,2; 10,54$;
c) $-3,7; -2\frac{1}{8}$; d) $-1; 0; 4; 7,2; 10,54$.

69. $3,97 \in (-\infty; 4)$. Pavyzdžiui: 3,972; 3,99. Nei didžiausio, nei mažiausio skaičiaus šiame intervale nėra.

70. *Nurodymas.* Šį pratimą galima spręsti žodžiu.

71. a) −5; b) −4; c) 3; d) tokio skaičiaus nėra.

72. *Nurodymas.* Pakartokite modulio sąvoką ir išnagrinėkite pateiktą pavyzdį.



Galima pasiūlyti mokiniams paimti konkrečias x reikšmes ir įsitikinti, kad nelygybės sprendiniai teisingai pavaizduoti skaičių tiesėje.

73. a) Taip; b) ne;
c) kadangi $a > b$, tai $2a > 2b$, o nelygybė $a > 2b$ teisinga ne su visomis kintamųjų reikšmėmis; pavyzdžiui, kai $a = 5$, $b = 3$, nelygybė $5 > 2 \cdot 3$ yra neteisinga; todėl sakome, kad duotoji nelygybė neteisinga;
d) taip; e) taip, nes $3a > 3b$ ir $3a + 1 > 3b$; f) taip.
Atsakymas. Teisingos yra a), d), e) ir f) punktų nelygybės.

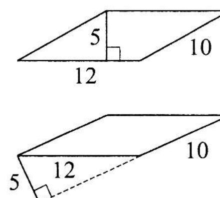
74. a) $11\frac{1}{9}a^2 + 16\frac{2}{3}ab + 6\frac{1}{4}b^2$; b) $5\frac{4}{9}x^2 - 16\frac{1}{3}xy + 12\frac{1}{4}y^2$;
c) $\frac{a^2}{9} + \frac{ab}{6} + \frac{b^2}{16}$; d) $\frac{x^2}{25} - \frac{xy}{10} + \frac{y^2}{16}$.

75. a) -6; 6; b) -13; 13; c) -9; 3; d) 7; 19.

76. a) $(4 + x) - (x + 4) = 0$; b) $(3a - b) - (a - b) = 2a$;
c) $(m + 2n) - (2n - m) = 2m$; d) $-(p - q) + (p - q) = 0$.

77. a) Tarkime, kad vienas skaičius yra x. Tada kitas skaičius bus $5x$. Sudarome lygtį: $\frac{x+5x}{2} = 30$, $x = 10$; $5x = 5 \cdot 10 = 50$.
b) Sudarę lygtį gauname: $\frac{x+x+10}{2} = 30$, $x = 25$; $x + 10 = 25 + 10 = 35$.
Atsakymas. a) 10; 50; b) 25; 35.

78. *Nurodymas.* Nusibraižykite brėžinį.



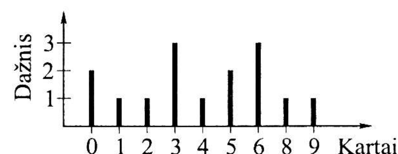
1 atvejis. Tarkime, kad duotoji aukštinė nubrėžta į 12 cm kraštinę. Tada lygiagretainio plotas $S = 12 \cdot 5 = 60\,(\text{cm}^2)$. Aukštinę, nubrėžtą į 10 cm kraštinę, pažymėkime h ir užrašykime, kam lygus lygiagretainio plotas: $S = 10 \cdot h$. Tada $60 = 10 \cdot h$, $h = 6$ cm.
2 atvejis. Tarkime, kad aukštinė nubrėžta į 10 cm kraštinę. Tada $S = 10 \cdot 5 = 50\,(\text{cm}^2)$. Taip pat $S = 12 \cdot h$. Tada $12 \cdot h = 50$, $h = 4\frac{1}{6}$ cm.
Atsakymas. Kita lygiagretainio aukštinė gali būti lygi 6 cm arba $4\frac{1}{6}$ cm.

79. 12 val. 30 min.

80. a) Iš viso buvo apklausta $15 + 15 = 30$ mokinių.
b) Norėdami rasti medianą duomenis užrašome variacine eilute:
pirmokai — 0; 0; 1; 2; 3; 3; 3; 4; 5; 5; 6; 6; 6; 8; 9; šios grupės mediana lygi 4, o vidurkis — $\frac{0 \cdot 2+1+2+3 \cdot 3+4+5 \cdot 2+6 \cdot 3+8+9}{15} = 4\frac{1}{15}$;
trečiokai — 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 5; šios grupės mediana lygi 2, o vidurkis — $\frac{0 \cdot 4+1 \cdot 3+2 \cdot 4+3 \cdot 3+5}{15} = 1\frac{2}{3}$.
c) Pirmokų atsakymai įvairesni.
d) Sudarome dažnių lenteles:

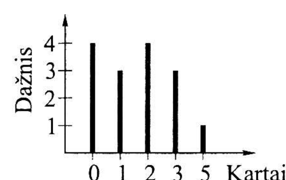
pirmokai

Kartai	0	1	2	3	4	5	6	8	9
Dažnis	2	1	1	3	1	2	3	1	1

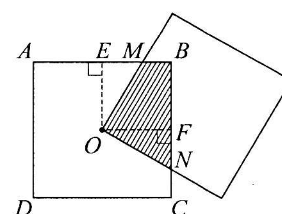


trečiokai

Kartai	0	1	2	3	5
Dažnis	4	3	4	3	1



81. 1) $OE = OF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5\,(\text{cm})$. $\triangle OEM$ ir $\triangle OFN$ — statūs. $\angle MON = 90°$; $\angle FON = \angle MON - \angle MOF = 90° - \angle MOF$; $\angle EOM = \angle EOF - \angle MOF = \angle MON - \angle MOF = 90° - \angle MOF$. Vadinasi, $\angle FON = \angle EOM = 90° - \angle MOF$. Taigi $\triangle EOM = \triangle OFN$ pagal kraštinę ir du kampus prie jų.



2) Kadangi $\triangle EOM = \triangle OFN$, tai $S_{BMON} = S_{BMOF} + S_{OFN} = S_{BMOF} + S_{OEM} = S_{OEBF}$.
3) $S_{BMON} = S_{OEBF} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot 5^2 = 6{,}25\,(\text{cm}^2)$.

82. a) Dainoros pažymių vidurkis yra $\frac{9+7\cdot 2+6}{4} = 7{,}25$.

b) Tarkime, jog reikia gauti pažymį m, kad vidurkis būtų didesnis už 7,5. Tada $\frac{29+m}{5} > 7{,}5$ ir $m > 8{,}5$. Vadinasi, Dainorai reikia gauti mažiausiai 9.
Aišku, kad norint pataisyti vidurkį, reikia tikrai gauti ne mažiau kaip 8. Bet tada $\frac{9+7\cdot 2+6+8}{5} = 7{,}4$. O štai gavus 9, vidurkis padidės 0,2 ir bus lygus 7,6.

Galima spręsti spėliojant.

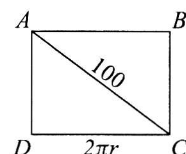
83. Rombo įstrižainės jo kampus dalija pusiau, tai $\angle B = 2 \cdot \angle 1 = 2 \cdot 29° = 58°$.
Rombo kampų, esančių prie vienos kraštinės, suma lygi 180°, tai $\angle B + \angle C =$ $= 180°$ ir $\angle C = 180° - 58° = 122°$.
Taip pat $\angle C = 2 \cdot \angle 2$, tai $\angle 2 = 122° : 2 = 61°$.
Galima samprotauti ir taip: kadangi $ABCD$ — rombas, tai $AC \perp BD$ ir $\angle AOB = 90°$ (O — įstrižainių susikirtimo taškas); be to, $AD \parallel BC$, tai $\angle 2 =$ $= \angle BAO$ (vidaus priešiniai kampai). Taigi $\angle 2 = \angle BAO = 90° - 29° = 61°$.

84. a) Gretasienio plotis yra 20 cm.

b) Jei priekinėje sienoje matosi plyta, kurios vienos sienos matmenys 10×5, tai ji padėta viena. Tokių plytų yra 16. Jei matosi sienoje plyta, kurios vienos sienos matmenys 20×10, tai jos dedamos po keturias. Tokių plytų yra $5 \cdot 4 = 20$. Jei matosi sienoje plyta, kurios vienos sienos matmenys 20×5, tai jos dedamos po 2. Tokių plytų yra $9 \cdot 2 = 18$. Iš viso sienoje yra $16 + 20 + 18 = 54$ (plytos).

Plytų kiekį galima apskaičiuoti gretasienio tūrį padalijus iš vienos plytos tūrio.

85. Reikia nagrinėti 2 atvejus.



1 atvejis.

a) $AD = 60\,\text{cm}$, $AC = 100\,\text{cm}$. Tada $CD = \sqrt{100^2 - 60^2} = 80\,(\text{cm})$.
Kadangi $CD = 2\pi r$ (čia r — ritinio pagrindo spindulys), tai $80 = 2\pi r$ ir $r = \frac{80}{2\pi} = \frac{40}{\pi} \approx 12{,}7\,(\text{cm})$.

b) Šiuo atveju ritinio aukštinė lygi 60 cm, o tūris
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(\frac{40}{\pi}\right)^2 \cdot 60 = \frac{96000}{\pi} \approx 30573{,}2\,(\text{cm}^3)$.

2 atvejis.

a) $CD = 60\,\text{cm}$, $AC = 100\,\text{cm}$. Tada $60 = 2\pi r$ ir $r = \frac{60}{2\pi} = \frac{30}{\pi} \approx 9{,}6\,(\text{cm})$.

b) Šiuo atveju ritinio aukštinė lygi 80 cm, o tūris
$V = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(\frac{30}{\pi}\right)^2 \cdot 80 = \frac{72\,000}{\pi} \approx 22\,929{,}9\,(\text{cm}^3)$.

Atsakymas. a) $\frac{40}{\pi}$ cm arba $\frac{30}{\pi}$ cm; b) $\frac{96\,000}{\pi}$ cm^3 arba $\frac{72\,000}{\pi}$ cm^3.

7.5. Nelygybių sprendimas

Tiesinių nelygybių su vienu kintamuoju sprendimas panašus į tiesinių lygčių su vienu nežinomuoju sprendimą, todėl mokiniai dažniausiai lengvai išmoksta spręsti tiesines nelygybes. Tačiau kartais daroma klaida, kai nelygybės abi pusės dauginamos arba dalijamos iš neigiamojo skaičiaus, o nelygybės ženklas nepakeičiamas priešingu. Taip pat sprendžiant nelygybes sunkiai suvokiami tokie atvejai, kai nelygybės sprendinys yra kiekvienas skaičius arba kai nelygybė visai neturi sprendinių. Tokie atvejai yra išnagrinėti skyrelio teorinėje dalyje ir juos siūloma aptarti su stipresniais mokiniais. Šio skyrelio tikslas — išmokyti spręsti tiesines nelygybes su vienu kintamuoju.

Pakartoti:
tiesinių lygčių sprendimą;
nelygybių savybes.

Išmokti:
spręsti tiesines nelygybes su vienu kintamuoju;
spręsti tekstinius uždavinius sudarant nelygybę.

Šiame skyrelyje:

1. Grįžtama prie realios situacijos, pradėtos nagrinėti 2 skyrelyje. Parodoma, kad šiuo atveju atsakymą galima rasti išsprendus nelygybę.
2. Nelygybės sprendžiamos remiantis šiomis savybėmis:

- prie abiejų nelygybės pusių galima pridėti arba atimti tą patį skaičių ar reiškinį;
- abi nelygybės puses padauginus arba padalijus iš teigiamojo skaičiaus nelygybės ženklas nesikeičia;
- abi nelygybės puses padauginus arba padalijus iš neigiamojo skaičiaus nelygybės ženklas keičiasi priešingu.

3. Apibrėžiamas nelygybės sprendinys:

Nelygybės sprendiniu vadinama kintamojo reikšmė, kuri nelygybę paverčia teisinga skaitine nelygybe.

4. Nusakoma, ką reiškia išspręsti nelygybę:

Išspręsti nelygybę — reiškia rasti visus jos sprendinius arba įsitikinti, kad sprendinių nėra.

Pastabos. 1. Mokant spręsti nelygybes (kaip ir mokant spręsti lygtis) labai svarbu, kad mokiniai ne tik suvoktų sprendimo algoritmą ir suprastų, kas yra nelygybės sprendinys, bet ir mokėtų pasitikrinti, ar gerai išspręsta nelygybė.
2. Jeigu sąlygoje nėra nurodyta, kaip turi būti užrašytas atsakymas, tai nelygybės sprendinius galima užrašyti įvairiai. Pavyzdžiui, nelygybės $x - 2 > 0$ sprendinius galima užrašyti: $x > 2$; $x \in (2; +\infty)$ arba tiesiog $(2; +\infty)$; arba „Visi skaičiai, didesni už du".

5. Pavyzdžiais parodomi įvairūs nelygybių sprendimo atvejai, tarp jų ir tokie, kai nelygybės sprendinys yra kiekvienas skaičius arba kai nelygybė sprendinių neturi. Pastaruosius siūloma panagrinėti su stipresniais mokiniais. Jiems skirta ir antroji užduotis vadovėlio teorinėje dalyje.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai uždaviniai yra 86–101. Likusi dalis uždavinių skirta kartojimui. Siūloma pakartoti reiškinių palyginimą nustatant jų skirtumo ženklą (102), nelygybių savybes (103), dvinario kėlimą kvadratu (104, 106), skaidymą dauginamaisiais (105) ir veiksmus su laipsniais (107).

50–66

86. -3; -2; 0; $1{,}5$.

87. a), e), f) — taip; b), c), d) — ne.

88. *Nurodymas.* Sprendžiant d) punktą reikia prisiminti, kada dviejų skaičių sandauga yra teigiamasis skaičius: $a \cdot b > 0$, kai $a > 0$ ir $b > 0$ arba kai $a < 0$ ir $b < 0$. Belieka parinkti tokias x reikšmes, kad abu dauginamieji ($5x$ ir $x + 2$) būtų arba teigiami, arba neigiami.
Nelygybės sprendiniai yra bet kurie skaičiai, paimti iš intervalo:
a) $(-2{,}5; +\infty)$; b) $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$; c) $(-\infty; 0]$; d) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

89. a) $(6; +\infty)$; b) $(-\infty); -12]$; c) $(6; +\infty)$; d) $(-\infty; 5)$; e) $[8; +\infty)$; f) $[-5; +\infty)$; g) $(-\infty; -39)$; h) $(-\infty; -60]$.

90. a) $x \in (-\infty; 1{,}4)$; b) $x \in (-\infty; 7)$; c) $x \in (-\infty; 8{,}75]$; d) $x \in (-\infty; 6{,}8]$; e) $x \in (-\infty; 1)$; f) $x \in [0; +\infty)$.

91. a) $y \geqslant -13$; b) $y > -1\frac{2}{5}$; c) $y > 2\frac{1}{3}$; d) $y \leqslant -23$; e) $y \leqslant 0$; f) $y > 2$; g) $y < -\frac{3}{7}$; h) $y \geqslant 0$.

Vadovėlyje yra korektūros klaida. Po punkto e) turėtų būti punktai f), g) ir h).

92. a) $4a - 1 > 0$, kai $a > \frac{1}{4}$;
b) $7a - 21 < 0$, kai $a < 3$;
c) $11 - 3a > 101$, kai $a < -30$;
d) $1{,}8a + 15 < 18{,}6$, kai $a < 2$.

Vadovėlyje punkte d) yra korektūros klaida. Vietoj x turėtų būti a, nes sąlyga formuluojama taip: „Su kuriomis a reikšmėmis..." Gudresnis mokinys turėtų pasakyti: „Nuo a reikšmės dvinario $1{,}8x + 15$ reikšmė nepriklauso".

93. a) $9 - 4p < 9p - 4$, kai $p > 1$; b) $\frac{2}{3}p + 7 > 7p + \frac{2}{3}$, kai $p < 1$.

94. *Nurodymas.* Sprendžiant šias nelygybes patogu kiekvieną nelygybės narį dauginti iš trupmenų bendro vardiklio, pavyzdžiui:
a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 11 \mid \times 6$,
$3x + 2x > 66$,
$x > 13\frac{1}{5}$;
b) $x \leqslant -900$; c) $x > -42$; d) $x \geqslant -3$.

95. a) Išsprendę nelygybę $(4 - 5n) + (2n + 8) > 0$ gauname $n < 4$.
b) $(17n + 9) - (6n + 20) < 0$, $n < 1$.
Atsakymas. a) $n = 1; 2; 3$; b) nėra tokių natūraliųjų n reikšmių.

96. a) $n < 6$, t. y. $n = 1; 2; 3; 4{,}5$; b) $n < 5$, t. y. $n = 1; 2; 3; 4$.

97. a) Sprendžiame nelygybę $(3x + 2)(3x - 2) > (3x - 2)^2$, iš čia $x > \frac{2}{3}$.
b) Sprendžiame nelygybę $(2y + 1)^2 < (2y + 5)(2y - 5)$, iš čia $y < -6\frac{1}{2}$.

98. Tarkime, kad kitos stačiakampio kraštinės ilgis yra x cm. Tada jo perimetras $P_{st} = 2 \cdot (9 + x)$ cm. Kvadrato perimetras $P_{kv} = 4 \cdot 21{,}5 = 86$ (cm). Kadangi stačiakampio perimetras mažesnis už kvadrato perimetrą, tai $2 \cdot (9 + x) < 86$, $x < 34$. Kadangi stačiakampio kraštinės ilgis gali būti tik teigiamasis skaičius, tai $x \in (0; 34)$.

99. Sprendimas analogiškas 98 uždavinio sprendimui. Pagal sąlygą sudarome nelygybę: $(x + 20) \cdot 2 < 40$, todėl $x < 0$. Uždavinys sprendinių neturi, nes stačiakampio kraštinės ilgis negali būti neigiamasis skaičius.

100. Sudarome nelygybę: $150 \cdot 80 \cdot h < 120^3$, $h < 144$. Taigi $h \in (0; 144)$.

101. Šį uždavinį sudarius nelygybę galima spręsti naudojantis skaičiuokliu. Tarkime, kad turistai gali nuplaukti x km. Plaukiant prieš srovę jų greitis yra $19{,}9 - 2{,}5 = 17{,}4$ (km/h), ir kelionėje jie sugaiš $\frac{x}{17{,}4}$ h. Plaukiant pasroviui jų greitis yra $19{,}9 + 2{,}5 = 22{,}4$ (km/h), ir kelionėje jie sugaiš $\frac{x}{22{,}4}$ h. Kadangi kelionė gali trukti ne ilgiau kaip 8 valandas, tai $\frac{x}{17{,}4} + \frac{x}{22{,}4} \leqslant 8$, $x \leqslant 78{,}3$ km (x reikšmė apskaičiuota apytiksliai; tiksli reikšmė yra $x \leqslant 78\frac{342}{995}$). Taigi turistai toliausiai gali nuplaukti maždaug 78,3 km.

102. *Nurodymas.* Norint įsitikinti, kad nelygybė teisinga su visomis x reikšmėmis, reikia panagrinėti kairės ir dešinės nelygybės pusių skirtumą.
a) $(x - 5)^2 - x(x - 10) = 25$; $25 > 0$, todėl $(x - 5)^2 > x(x - 10)$;
b) $x(x + 6) - (x + 3)^2 = -9$; $-9 < 0$, todėl $x(x + 6) < (x + 3)^2$;
c) $(x - 11)(x + 11) - (x - 8)(x + 8) = -57$; $(x - 11)(x + 11) < (x - 8)(x + 8)$;
d) $(x - 3)(x + 3) - (x + 5)(x - 5) = 16$; $(x - 3)(x + 3) > (x + 5)(x - 5)$.

103. **C**; **B**; **C**; **A**; **B**; **A**; **A**.

Šį pratimą galima spręsti žodžiu.

104. a) 4; b) $\left(\frac{b}{a}\right)^2$; c) $12b$; d) $28y$; e) $100a$; f) $2m$.

105. a) $(2p - 3)(2p + 3)$;
b) $(10a^2 - 9b^2)(10a^2 + 9b^2) = (\sqrt{10}a - 3b)(\sqrt{10}a + 3b)(10a^2 + 9b^2)$;
c) $(ab^2 - c)(ab^2 + c)$;
d) $(y^2 - x^2z)(y^2 + x^2z)$.

106. a) $5x^2 - 6xy + 2y^2$;
b) $20a^2 - 12ab + 45b^2$;
c) $2a^2y^2 - 4a^2y - 2a^2$;
d) $8\frac{1}{2}a^2 - 18ab + 34\frac{1}{4}b^2$.

107. a) $-1\frac{1}{2}$; b) -9.

7.6. Nelygybių sistemos

Šio skyrelio teorinė medžiaga yra visiškai nauja. Pirmą kartą susiduriama su *sistemos* sąvoka ir jos žymėjimu „{", t. y. riestiniu skliaustu.
Labai svarbu, kad mokiniai suprastų, jog sprendžiant nelygybių sistemą kiekviena nelygybė sprendžiama atskirai, o sistemos sprendinys yra tos kintamojo reikšmės, su kuriomis abi nelygybės yra teisingos. Kitaip sakant, reikia rasti abiejų nelygybių bendrus sprendinius. Vadovėlyje pateikiamos tik tiesinių nelygybių su vienu kintamuoju sistemos, sudarytos iš dviejų nelygybių. Šios medžiagos įsisavinimas padės geriau suvokti ir išmokti spręsti ir tiesinių lygčių sistemas, kurios bus nagrinėjamos 9 klasėje. Taip pat mokoma dvigubą nelygybę pakeisti nelygybių sistema.

Pakartoti:

kas yra nelygybės sprendinys;
ką reiškia išspręsti nelygybę;
kaip sprendžiamos nelygybės.

Išmokti:

užrašyti nelygybių sistemą;
kas yra nelygybių sistemos sprendinys;
ką reiškia išspręsti nelygybių sistemą;
kaip sprendžiamos nelygybių sistemos;
dvigubąją nelygybę pakeisti nelygybių sistema.

Šiame skyrelyje:

1. Sprendžiant tekstinį uždavinį sudaroma nelygybių sistema ir įvedamas jos žymėjimo ženklas — riestinis skliaustas.
2. Apibrėžiamas nelygybių sistemos sprendinys:

> *Nelygybių su vienu kintamuoju sistemos sprendiniu vadinamos tos kintamojo reikšmės, su kuriomis yra teisinga kiekviena sistemos nelygybė.*

3. Nusakoma, kad išspręsti nelygybių sistemą — reiškia rasti visus jos sprendinius arba įsitikinti, kad jų nėra. Pateikti du nelygybių sistemos sprendimo pavyzdžiai.
4. Parodoma, kaip dvigubą nelygybę pakeisti nelygybių sistema ir ją išspręsti.

   Pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad nelygybių sistemos sprendinius galima užrašyti intervalu arba nelygybe.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

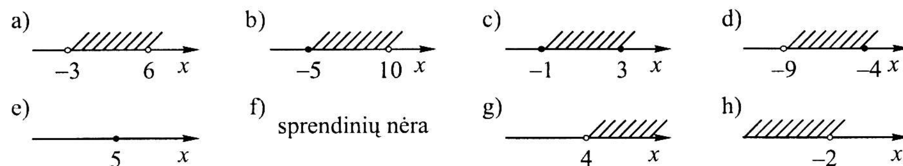
Šiai temai skirti 108–119 uždaviniai. Pakartoti siūloma skaitinio reiškinio reikšmės (120, 121), skaičiaus dalies (122) radimą, vienų greičio matavimo vienetų vertimą kitais (123), reiškinių prastinimą (124, 125), tekstinių uždavinių sprendimą (126, 129), taškų atidėjimą koordinačių plokštumoje (130), trikampio priekampio savybes (131).

Uždavinyne nėra papildomų pratimų, skirtų šiai temai.

108. *Nurodymas.* 108 ir 109 uždavinius sprendžiame įstatydami į abi sistemos nelygybes duotą skaičių ir tikrindami, ar jis tenkina abi nelygybes.
a) Ne; b) ne; c) taip; d) taip.

109. a) 0; 3; b) −3; −2; 0.

110. *Nurodymas.* Atkreipkite dėmesį į šiuos pratimus: e) sprendinys tik vienas skaičius 5; f) sprendinių nėra; g) $x \in (4; +\infty)$; h) $x \in (-\infty; -2)$.



111. a) $[-7; -3]$; b) $(6; +\infty)$; c) $(-\infty; -1)$;
d) $(1; 4)$; e) $[0; 4]$; f) $(-2; +\infty)$.

112. *Nurodymas.* Atkreipkite dėmesį, kad prašoma rasti tik sveikuosius nelygybių sistemos sprendinius.
a) $a \in (-1{,}5; 3{,}3)$, taigi $a = -1; 0; 1; 2; 3$;
b) $y \in \left(-2\frac{1}{6}; 4\right]$, taigi $y = -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$;
c) $x \in \left(-5; 8\frac{1}{2}\right)$, taigi $x = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$;
d) $x \in \left[\frac{1}{6}; 2\right]$, taigi $x = 1; 2$.

113. a) $(-\infty; -3)$; b) $[6; +\infty)$; c) $[-2; 38]$; d) sprendinių nėra;
e) $(-29; 5)$; f) $\left(-1\frac{1}{4}; 2\frac{1}{6}\right]$.

114. *Nurodymas.* Dvigubosios nelygybės sprendimo pavyzdys pateiktas skyrelio teorinėje dalyje.

a) $7 < x < 9$; b) $-9 < x < 0$; c) $3 \leqslant x \leqslant 17$; d) $4 < x \leqslant 7\frac{1}{3}$;
e) $-8\frac{5}{6} < x \leqslant -8$; f) $1{,}5 < x < 4$.

115. Uždavinį galima spręsti sudarant nelygybių sistemą:

a) $\begin{cases} 5a - 2 < 2, \\ 5a - 2 > -1; \end{cases}$ $a \in \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$; b) $\begin{cases} 5a - 2 \leqslant 8, \\ 5a - 2 \geqslant 4; \end{cases}$ $a \in \left[1\frac{1}{5}; 2\right]$;

c) $\begin{cases} 5a - 2 \leqslant 4, \\ 5a - 2 > -3; \end{cases}$ $a \in \left(-\frac{1}{5}; 1\frac{1}{5}\right]$; d) $\begin{cases} 5a - 2 < 100, \\ 5a - 2 \geqslant 6; \end{cases}$ $a \in \left[1\frac{3}{5}; 20\frac{2}{5}\right)$;

arba sąlygą užrašius dvigubąja nelygybe, pavyzdžiui:

a) $-1 < 5a - 2 < 2$,
$-1 + 2 < 5a - 2 + 2 < 2 + 2$,
$1 < 5a < 4$,
$\frac{1}{5} < \frac{5a}{5} < \frac{4}{5}$,
$\frac{1}{5} < a < \frac{4}{5}$.

116. a) $b \in [1{,}5; 3{,}5]$; b) $b \in [-4{,}5; -2{,}5)$; c) $b \in (2; 6)$; d) $b \in (-2; 2{,}5]$.

Sprendimas analogiškas 115 uždavinio sprendimui.

117. Tarkime, kad turistas per dieną galėjo nuplaukti x km. Pagal uždavinio sąlygą sudarome nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} (x + 5) \cdot 5 > 90, \\ (x - 5) \cdot 6 < 90. \end{cases}$$

Išsprendę gauname, kad $x \in (13; 20)$. Turistas per dieną galėjo nuplaukti daugiau kaip 13 km, bet mažiau kaip 20 km.

118. Svarsčių kainą pažymėkime x Lt. Pagal uždavinio sąlygą sudarome nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} (x + 2) \cdot 6 > 90, \\ (x - 2) \cdot 5 < 60. \end{cases}$$

Išsprendę gauname, kad $x \in (13; 14)$. Vadinasi, mažiausiai svarsčiai gali kainuoti 13,01 Lt, o daugiausiai — 13,99 Lt. Reikia atkreipti dėmesį, kad šio uždavinio sprendiniai nėra ištisas skaičių intervalas, o konkretūs skaičiai, išreiškiantys kainą sveikuoju centų skaičiumi. Iš viso gali būti 99 sprendiniai.

119. Jei dviženklis skaičius yra m, tai pusė jo yra $\frac{1}{2}m$. Pagal uždavinio sąlygą $117 < m + \frac{1}{2}m < 123$ ir $78 < m < 82$. Taigi šis dviženklis skaičius gali būti 79; 80; 81. Uždavinys turi tris sprendinius.

120. a) $\frac{3}{50}$; b) $\frac{1}{3}$.

121. a) Pastebėkime, kad sudėdami po du skaičius iš eilės gauname -1. Iš viso tokių porų yra $1998 : 2 = 999$, o jų suma lygi -999. Taigi prie -999 pridėję 1999 gausime 1000, t. y. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 1997 - 1998 + 1999 = (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \dots + (1997 - 1998) + 1999 = \underbrace{-1 - 1 - 1 - \dots - 1}_{999 \text{ dėmenys}} + 1999 = -1 \cdot 999 + 1999 = 1000$.

b) Panašiai sprendžiame ir šį uždavinį: $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \dots - 1997 + 1998 - 1999 = (-1+2) + (-3+4) + (-5+6) + \dots + (-1997+1998) - 1999 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{999 \text{ dėmenys}} - 1999 = 999 - 1999 = -1000$;

galima remtis punkto a) atsakymu: $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \dots - 1997 + 1998 - 1999 = -(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 1997 - 1998 + 1999) = -1000$.

122. 20 centų yra 0,2 Lt. Padaliję 0,2 iš x rasime, kurią x Lt dalį sudaro 0,2 Lt: $\frac{0{,}2}{x} = \frac{1}{5x}$.

Atsakymas. **D.**

123. $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{90 \cdot 1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Atsakymas. **E.**

124. $x - (-x + 3) = 2x - 3$; $2 - (4 - (2x + 5)) = 3 + 2x$;

a) $4x$; b) -6; c) $4x^2 - 9$; d) $8x^2 + 18$.

125. Jei $x - 5 = 3$, tai $x = 8$. Tada $25 - 10x + x^2 = 25 - 10 \cdot 8 + 8^2 = 9$.

Galima spręsti ir taip: $25 - 10x + x^2 = (x - 5)^2 = 3^2 = 9$.

126. Tarkime, kad Pauliui yra x metų. Tada seseriai yra $(20-x)$ metų. Pagal sąlygą sudarome lygtį: $x-2(20-x)=2$, $x=14$; $20-x=20-14=6$. Pauliui yra 14 metų, o jo seseriai — 6 metai.

127. a) 0; -3; -8; b) sprendinių nėra.

128. a) 0,0002; b) 0,00012; c) 0,9375; d) 0,45.

129. Reikia rasti skaičių 30 ir 40 mažiausią bendrą kartotinį. MBK(30; 40) = 120. Taigi abu autobusai vėl vienu metu išvažiuos iš „žiedo" po 120 min, t. y. po 2 h.

130. $(-2; 2)$.

131. Tarkime, kad trikampio kampas yra x laipsnių. Tada jo priekampis bus $x-40°$. Jų suma lygi $180°$, tai $x+x-40°=180°$, $x=110°$. Trikampio kampas lygus $110°$.

132. Jeigu kvadrato T plotas lygus $16\,\text{cm}^2$, tai jo kraštinė yra $\sqrt{16}=4\,(\text{cm})$. Jei kvadrato R perimetras lygus 28 cm, tai jo kraštinė yra $28:4=7\,(\text{cm})$. Tada kvadrato P kraštinė lygi $4+7=11\,(\text{cm})$, ir jo perimetras yra 44 cm.
Atsakymas. **D**.

133. **B**.

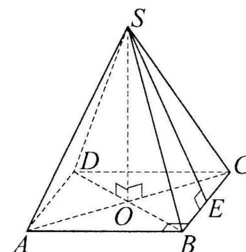
Žr. „Kengūra", TEV, Vilnius, 1999. Uždavinys **B6**, p. 38.

134. $\triangle ABC$ yra status, tai $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}\,(\text{cm})$. $\triangle SOC$ yra status, tai $SC=\sqrt{SO^2+OC^2}$; $OC=\frac{AC}{2}=3\sqrt{2}\,(\text{cm})$, tai $SC=$ $=\sqrt{8^2+(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{82}\,(\text{cm})$. $\triangle SEC$ yra status, tai $SE=\sqrt{SC^2-EC^2}$; $EC=\frac{BC}{2}=3\,\text{cm}$, tai $SE=\sqrt{(\sqrt{82})^2-3^2}=\sqrt{73}\,(\text{cm})$.

$S_{\triangle BSC}=\frac{SE\cdot BC}{2}=\frac{\sqrt{73}\cdot 6}{2}=3\sqrt{73}\,(\text{cm}^2)$;

$S_{\triangle BSD}=\frac{SO\cdot BD}{2}=\frac{8\cdot 6\sqrt{2}}{2}=24\sqrt{2}\,(\text{cm}^2)$.

Vadovėlyje netiksli sąlyga. Reikėtų pasakyti, kad keturkampis $ABCD$ — kvadratas.



135. Mažų kubelių bus $8^3=512$.

a) Su trimis raudonomis sienomis yra 8 kubeliai (kampiniai), ir jie sudaro $\frac{8}{512}\cdot 100\approx 1{,}6(\%)$ visų kubelių.

b) Su dviem raudonomis sienomis yra $12\cdot 6=72$ kubeliai (prie kiekvienos briaunos po 6), ir jie sudaro $\frac{72}{512}\cdot 100\approx 14{,}1(\%)$ visų kubelių.

c) Su viena raudona siena yra $6\cdot 6\cdot 6=216$ kubelių (ant kiekvienos sienos po 6×6), ir jie sudaro $\frac{216}{512}\cdot 100\approx 42{,}2(\%)$ visų kubelių.

d) Su bent viena raudona siena yra $8+72+216=296$ kubeliai, ir jie sudaro $\frac{296}{512}\cdot 100\approx 57{,}8(\%)$ visų kubelių.

Pastaba. Verta mokinius paklausti, kiek yra nedažytųjų kubelių $(6\cdot 6\cdot 6=216)$. Tai būtų ir pasitikrinimas, ar gerai skaičiuota $(216+296=512)$.

8. SIMETRIJA

Šiame skyriuje nagrinėjama simetrija tiesės ir taško atžvilgiu. Tai nauja teorinė medžiaga.

Pirmame ir antrame skyreliuose nagrinėjamos dvi lygios figūros, užimančios tam tikrą padėtį tiesės ir taško atžvilgiu.

Trečiame skyrelyje nagrinėjamos figūros, kurios yra simetriškos pačios sau tiesės ar taško atžvilgiu.

Simetrijos pavyzdžių nesunkiai galima rasti mus supančioje aplinkoje, todėl mokiniams ši tema neturėtų būti sunki. Simetrija plačiai taikoma ir matematikoje, todėl šiame skyriuje yra ir geometrijos faktų bei teoremų, kurie susiję su simetrija.

Pagrindiniai šio skyriaus tikslai yra išmokyti:

— nubraižyti figūrą, simetrišką duotajai figūrai tiesės ir taško atžvilgiu;

— rasti taškus, vienodai nutolusius nuo dviejų duotųjų taškų ir nuo kampo kraštinių;

— statinio, esančio prieš 30° kampą, savybę.

Pastabos.

1. Patartume mokytojams pasiskaityti apie simetriją ir kitose knygose. Pavyzdžiui, populiariai ir vaizdžiai apie simetriją rašoma knygose „Kelionės į šiuolaikinę matematiką" ir „Tiksliejі mokslai humanitarams, II dalis".
2. Simetrija tradiciškai nėra egzaminų tema, bet nereikėtų jos ignoruoti. Simetrija mus supa kiekviename žingsnyje, o jos nagrinėjimas matematiniu požiūriu yra įdomus, pamokantis ir lavinantis vaizduotę.

8.1. Simetrija tiesės atžvilgiu

Šiame skyrelyje įvedamos naujos sąvokos: simetrija tiesės atžvilgiu ir simetrijos ašis. Skyrelio teorinę dalį galima suskirstyti į 3 dalis:

1) apibrėžiama (susitariama), kokias dvi figūras vadinsime simetriškomis tiesės atžvilgiu;
2) mokoma duotosioms geometrinėms figūroms nubraižyti simetriškas figūras tiesės atžvilgiu;
3) parodoma, kaip simetrija tiesės atžvilgiu taikoma geometrijoje.

Svarbiausias tikslas — išmokyti nubraižyti figūrą, simetrišką duotajai figūrai tiesės atžvilgiu. Taip pat svarbu, kad mokiniai mokėtų teoremą apie stačiojo trikampio statinį, esantį prieš 30° kampą.

Pakartoti:

statmens, einančio per duotąjį tašką, tiesei brėžimą naudojantis kampainiu arba skriestuvu ir liniuote;
trikampio aukštinės, pusiaukampinės ir pusiaukraštinės apibrėžimus;
lygių figūrų apibrėžimą.

Išmokti:

atpažinti figūras, simetriškas tiesės atžvilgiu;
nubraižyti figūrą, simetrišką duotajai figūrai tiesės atžvilgiu;
statinio, esančio prieš 30° kampą, savybę.

Šiame skyrelyje:

1. Aiškinama, kokios dvi lygios figūros yra simetriškos tiesės atžvilgiu. Vadovėlyje pateikiami du apibrėžimai: nematematinis (praktiškas) ir matematinis (teorinis).

Pirmąjį, nematematinį apibrėžimą pasižiūrėję į brėžinį turėtų suvokti visi mokiniai. Svarbiausia pastebėti, kad figūros, simetriškos tiesės atžvilgiu:

- yra lygios;
- sulenkus lapą per simetrijos ašį sutampa.

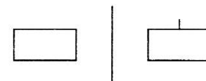
Prie antrojo, matematinio, apibrėžimo mokiniai turi prieiti atlikdami 1 užduotį. Pirmiausia reikia išsiaiškinti, kokie du taškai yra simetriški tiesės atžvilgiu, t. y.:

- atkarpa, jungianti simetriškus taškus, yra *statmena* simetrijos ašiai;
- simetrijos ašis atkarpą, jungiančią simetriškus taškus, dalija *pusiau*,

ir suformuluoti figūrų, simetriškų tiesės atžvilgiu, apibrėžimą.

Pastaba. Reikėtų pabrėžti, kad simetriškų figūrų vienos figūros visi taškai yra simetriški kitos figūros taškams, ir *atvirkščiai* — kitos figūros taškai yra simetriški pirmos figūros taškams.

Aišku, tai įmanoma tik tada, kai abi figūros yra lygios. Tai iliustruodami galėtume nubraižyti nesimetriškų figūrų pavyzdžių, pavyzdžiui:



2. Mokoma nubraižyti figūrą, simetrišką duotajai figūrai tiesės atžvilgiu. Svarbiausia, kad mokiniai suvoktų, kaip duotajam taškui, atkarpai, tiesei (1 pavyzdys) ir apskritimui (2 pavyzdys) nubraižyti simetrišką figūrą. Vadovėlyje išnagrinėtuose pavyzdžiuose tai detaliai paaiškinta. Kad nubraižytos figūros yra simetriškos, galima įsitikinti lenkiant lapą per simetrijos tiesę (žr. praktinį apibrėžimą) ir įro-

dyti griežtai, t. y. kad bet kuris kiekvienos figūros taškas yra simetriškas kitos figūros taškui (žr. teorinį apibrėžimą). Griežtas įrodymas (atkarpoms) pateikiamas smulkiu šriftu ir nėra privalomas.

Nagrinėjant 1 pavyzdį pirmiausia reikia paanalizuoti taško, simetriško duotajam taškui, radimą, po to — atkarpos ir galiausiai tiesės. Mokytojas gali pasiūlyti mokiniams parašyti algoritmą, kaip tiesei brėžiama simetriška tiesė. Čia mokiniai turėtų pastebėti, kad negudraujant galima rasti dviem tiesės taškams simetriškus taškus ir per juos nubrėžti tiesę. Galima braižyti ir gudriau:

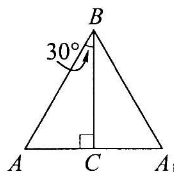
- jei tiesė kerta simetrijos ašį, tai užtenka vienam tiesės taškui rasti simetrišką ir per tą tašką ir tašką, kuriame duotoji tiesė kerta simetrijos ašį, nubrėžti tiesę;
- jei duotoji tiesė yra lygiagreti simetrijos ašiai, galima bet kuriam tos tiesės taškui rasti simetrišką ir per jį nubrėžti tiesę, lygiagrečią simetrijos ašiai.

Vadovėlyje pateiktą 2 užduotį mokiniai turėtų atlikti nesunkiai. Paprašykite mokinių, kad jie žodžiais nusakytų brėžimo algoritmą.

3. Būtina, kad mokiniai išmoktų teoremą, kad *stačiojo trikampio statinis, esantis prieš* 30° *kampą, lygus pusei įžambinės*.

Teoremos įrodymas yra nesudėtingas. Šis įrodymas neįprastas tuo, kad brėžinys papildomas simetrišku trikampiu.

Teoremos įrodymas. Nubraižykime trikampį BCA_1, simetrišką trikampiui BCA tiesės BC atžvilgiu.



Tuomet $\triangle ABC = \triangle A_1BC$, todėl $\angle ABC = \angle A_1BC = 30°$, $AC = A_1C$. Kita vertus, $\triangle ABA_1$ yra lygiakraštis, nes $\angle ABA_1 = \angle ABC + \angle A_1BC = 30° + 30° = 60°$; $\angle BAC = \angle BA_1C = 90° - 30° = 60°$. Vadinasi, $AB = BA_1 = AA_1$. Kadangi $AC = \frac{1}{2}AA_1$, tai $AC = \frac{1}{2}AB$.

Pastabos. 1. Nesunku būtų įrodyti ir atvirkštinę teoremą: jeigu stačiojo trikampio statinio ilgis lygus pusei įžambinės ilgio, tai tas statinis yra prieš 30° kampą.

2. Patartume šiai teoremai skirti atskirą pamoką.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

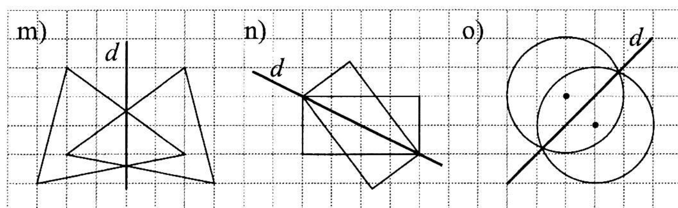
136–146 uždaviniai yra teminiai. Vadovėlyje yra tik vienas pratimas (136), skirtas figūroms, simetriškoms tiesės atžvilgiu, atpažinti. Uždavinyne tokių uždavinių nepateikta iš viso. (Vadovėlyje ir uždavinyne dauguma užduočių skirta simetriškoms figūroms braižyti.) Manome, kad atpažinti, ar duotosios figūros yra simetriškos, yra lengvesnė užduotis, negu nubraižyti figūrą, simetrišką duotajai. Siūlome mokytojui sugalvoti ir papildomai pateikti mokiniams užduotis skirtas simetriškoms figūroms atpažinti.

137 — skirtas įgūdžiams formuoti braižant simetriškas figūras tiesės atžvilgiu. Visiškai nebūtina atlikti visą pratimą klasėje — dalį galima skirti namų darbams. 138 — gabesniems mokiniams, 146 — teoremos apie statinį, esantį prieš 30° kampą, taikymas. Kartojimui skirti 147–152 pratimai: tai lygčių (147, 150a) ir nelygybių (148, 150b) sudarymas ir sprendimas, vidurkio sampratos plėtojimas (148), laipsnio savybių taikymas ir skaitinio reiškinio reikšmės radimas (149), palūkanų, palūkanų normos, indėlio dydžio radimas (151) bei kombinatorikos pratimas (152).

1–7, 10, 14, 19, 33–35

136. C.

137. *Nurodymas.* Remkitės 1 ir 2 pavyzdžiais, išnagrinėtais teorinėje dalyje. Pavyzdžiui:



138. Teiginys neteisingas. Taškai A ir C yra simetriški tik tiesės, einančios per tašką B ir statmenos atkarpai AC, atžvilgiu.

139. a) 5 dm; b) 3,6 dm.

140. a) *Nurodymas.* Raskite tašką C_1, simetrišką taškui C tiesės d atžvilgiu. Sujunkite taškus A, C_1 ir C_1, B. Trikampiai ABC ir AC_1B bus simetriški tiesės d atžvilgiu.
b) Trikampio ABC aukštinė, pusiaukraštinė ir pusiaukampinė yra simetriškos trikampio ABC_1 aukštinei, pusiaukraštinei ir pusiaukampinei.

141. *Nurodymas.* Nubraižykite trikampį ABC_1, simetrišką trikampiui ABC tiesės AB atžvilgiu. Nubrėžkite jo aukštinę iš viršūnės C_1 ir raskite jai simetrišką aukštinę tiesės AB atžvilgiu.

142. Raskite tiesių a ir d susikirtimo tašką M. Tiesė a_1, einanti per taškus A_1 ir M, yra simetriška tiesei a.

143. a) Tiesių A_1B ir d susikirtimo taškas M yra tiesių AB_1 ir BA_1 susikirtimo taškas.
b) $A_1B_1 = AB$, $AB_1 = A_1B$;
c) $\angle A_1AB_1 = \angle AA_1B$, $\angle AA_1B_1 = \angle A_1AB$.

144. a) $A_1(2; 0)$, $B_1(2; -3)$, $C_1(0; -3)$, $D_1(-2; 0)$, $E_1(-2; 3)$;
b) $A_2(-2; 0)$, $B_2(-2; 3)$, $C_2(0; 3)$, $D_2(2; 0)$, $E_2(2; -3)$.

145. a) $M_1(x; -y)$; b) $M_2(-x; y)$.
Pastaba. Galima padaryti apibendrinančią išvadą: taškų, simetriškų Ox ašies atžvilgiu, abscisės yra lygios, o ordinatės — priešingos; taškų, simetriškų Oy ašies atžvilgiu, abscisės yra priešingos, o ordinatės — lygios.

146. *Nurodymas.* Remkitės teorema, kad stačiojo trikampio statinis, esantis prieš 30° kampą, lygus pusei įžambinės, bei Pitagoro teorema.

Vadovėlyje šiai teoremai taikyti skirti 163, 164, 221, 222, 19 (74 p.), 269, 287, 298, 13 (103 p.), 14 (103 p.) uždaviniai.
Uždavinyne: 14 (59 p.), 19 (60 p.).

AB	DC	AC	AD	BC	BD
$8\sqrt{3}$	4	16	12	8	$4\sqrt{3}$
$\frac{20\sqrt{3}}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{40}{3}$	10	$\frac{20}{3}$	$\frac{10\sqrt{3}}{3}$
$10\sqrt{3}$	5	20	15	10	$5\sqrt{3}$
$4\sqrt{3}$	2	8	6	4	$2\sqrt{3}$
12	$2\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	6
$8\sqrt{3}$	4	16	12	8	$4\sqrt{3}$

147. Sakykime, kad plokštelės *si* ilgis yra x mm, tada plokštelės *re* ilgis bus $1{,}3x$ mm. Sudarome lygtį: $124 + 1{,}3x + 110 + 107 + 101 + 95 + x + 88 = 832$, $x = 90$; $1{,}3x = 1{,}3 \cdot 90 = 117$.
Atsakymas. Plokštelės *si* ilgis yra 90 mm, o *re* — 117 mm.

148. $\frac{7+8+5+x}{4} \geqslant 7$, $x \geqslant 8$. Taigi Marius turi gauti 8, 9 arba 10.

149. a) 25; b) 1000; c) $-7{,}88333... = -7\frac{53}{60}$; d) $-3\frac{5}{8}$.

150. a) Sakykime, kad kvadrato kraštinės ilgis yra x m. Tada stačiakampio kraštinės bus $(x+3)$ m ir $(x-2)$ m. Sudarome lygtį: $(x+3)(x-2) = x^2$, $x = 6$.
b) Sprendžiame nelygybę $(x-2)(x+3) \geqslant x^2$, $x \geqslant 6$.

151. a) $884 - 850 = 34$ (Lt); b) $\frac{34}{850} \cdot 100\% = 4\%$;
c) $\frac{1008{,}8}{104} \cdot 100 = 970$ (Lt); d) $\frac{1500 \cdot 4}{100} = 60$ (Lt).

152. **D.**

8.2. Simetrija taško atžvilgiu

Šio skyrelio struktūra yra tokia pat, kaip ir praeito skyrelio:

1) apibrėžiama (susitariama), kokias dvi figūras vadinsime simetriškomis taško atžvilgiu;
2) mokoma duotosioms geometrinėms figūroms nubraižyti simetriškas figūras taško atžvilgiu;
3) parodoma, kaip simetrija taško atžvilgiu taikoma geometrijoje.

Svarbiausias tikslas — išmokyti nubraižyti figūrą, simetrišką duotajai taško atžvilgiu.

Pakartoti:

atkarpos dalijimą pusiau;

norimo ilgio atkarpos atidėjimą naudojantis skriestuvu.

Išmokti:

atpažinti figūras, simetriškas taško atžvilgiu;

nubraižyti figūrą, simetrišką duotajai figūrai taško atžvilgiu.

Pastaba. Kadangi šio skyrelio struktūra analogiška praeito skyrelio struktūrai, tai jo smulkiai nenagrinėsime, o pateiksime tik kelias pastabas.

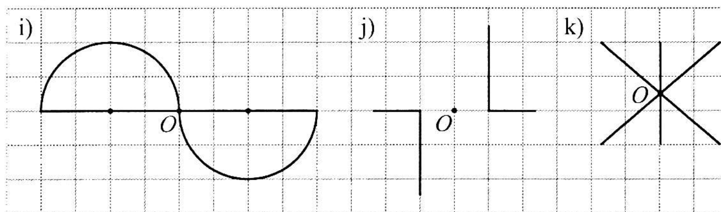
Šiame skyrelyje:

1. Nematematinį (praktišką) figūrų, simetriškų taško atžvilgiu, apibrėžimą panagrinėję vadovėlyje esantį piešinį turėtų suvokti visi mokiniai. Simetrija taško atžvilgiu yra sunkiau suvokiama negu simetrija tiesės atžvilgiu, nes sunkiau yra įsivaizduoti posūkį apie tašką negu lapo lenkimą per tiesę.
2. Mokant figūrai nubraižyti simetrišką figūrą centro atžvilgiu pirmiausia išsiaiškinkite, kaip taškui randamas simetriškas taškas. Patartina šiuo atveju naudotis ir skriestuvu.
3. Įrodytas teiginys, kad taško atžvilgiu simetriškos atkarpos yra lygiagrečios. Šiuo faktu dažnai patogu būna remtis braižant figūrą simetrišką duotajai figūrai kokio nors taško atžvilgiu.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

153–162 uždaviniai yra teminiai. Nei vadovėlyje, nei uždavinyne nėra pratimų, skirtų figūroms simetriškoms taško atžvilgiu, atpažinti, todėl siūlome mokytojui jų sugalvoti ir pateikti mokiniams (ypač silpnesniems). Figūrai, simetriškai duotajai figūrai taško O atžvilgiu, braižyti skirti 153, 158, 160, 161. Atliekant 160 pratimą reikia prisiminti, kaip randamas atkarpos vidurio taškas. 157 ir 161 uždaviniai skirti gabesniems mokiniams, o 155 galima atlikti ir žodžiu.
Simetrija tiesės atžvilgiu primenama 173 ir 174 uždaviniuose. Nemažai uždavinių yra geometrijos kursui pakartoti (163, 164, 166a, 167, 168a,b). Be to, kartojama lygčių ir nelygybių sudarymas ir sprendimas (166b–d, 168c,d, 171, 172), skaitinio reiškinio reikšmės radimas (169), reiškinio reikšmės įvertinimas (167), reiškinių prastinimas (170). 37–46, 48

153. *Nurodymas.* Remkitės 1 ir 2 pavyzdžiais, išnagrinėtais teorinėje dalyje.
Pavyzdžiui:

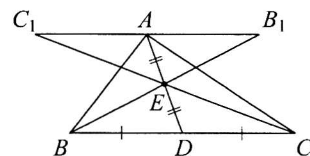


154. Teisingas yra tvirtinimas **B**, nes trikampiai nėra lygūs (jų kampai nevienodi).

155. a) Taškas A yra simetriškas taškui D taško B atžvilgiu;
b) taškas B yra simetriškas taškui D taško C atžvilgiu;
c) taškas C yra simetriškas taškui E taško D atžvilgiu. Taip pat taškas C yra simetriškas taškui F taško E atžvilgiu;
d) taškas C yra simetriškas taškui F taško E atžvilgiu.

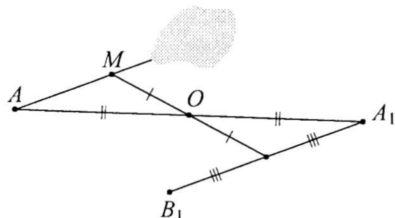
156. a) Kadangi $AB + BC = 4 + 9 = 13\,(\text{cm})$, $AC = 12\,\text{cm}$, tai taškai A, B ir C nepriklauso vienai tiesei. Vienai tiesei nepriklauso ir jiems simetriški taškai A_1, B_1 ir C_1, nes $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ ir $A_1B_1 + B_1C_1 = 13\,\text{cm}$, o $A_1C_1 = 12\,\text{cm}$.
b) Kadangi $AB + BC = 6 + 7 = 13\,(\text{cm})$, $AC = 13\,\text{cm}$, tai taškai A, B ir C priklauso vienai tiesei. Vienai tiesei priklauso ir jiems simetriški taškai A_1, B_1 ir C_1.

157. Kadangi taškai A ir B_1 yra simetriški taškams D ir B taško E atžvilgiu, tai $BD = AB_1$. Analogiškai įsitikiname, kad $DC = AC_1$, $BC = B_1C_1$. Kadangi $BD + DC = BC$, tai $B_1A + AC_1 = B_1C_1$. Taškai A, B_1 ir C_1 yra vienoje tiesėje.



Pastaba. Galima įrodyti, kad $BD \parallel B_1A$, $DC \parallel AC_1$. Kadangi D yra tiesėje BC, tai $AB_1 \parallel BC$, $AC_1 \parallel BC$. Iš čia išplaukia, kad taškas A priklauso tiesei B_1C_1.

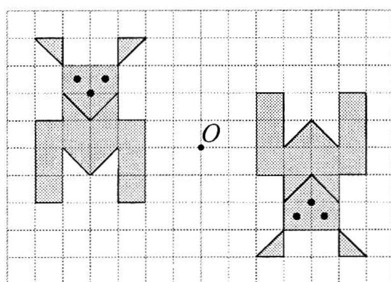
158.



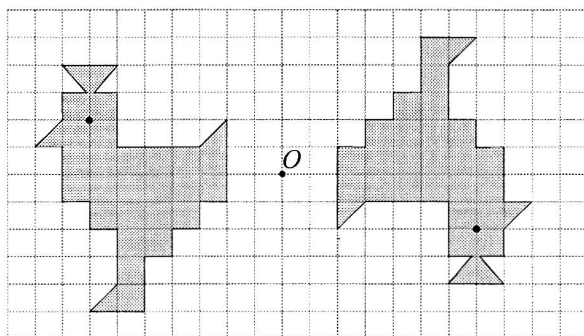
159. 26,6 cm.

160. *Nurodymas.* Pirmiausia surandame simetrijos centrą O. Jis bus atkarpos AA_1 vidurio taškas.

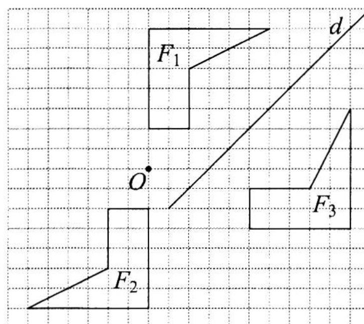
161. a)



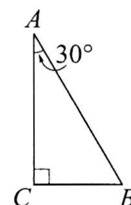
b)



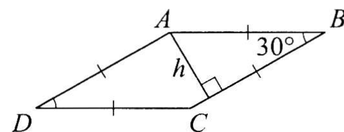
162. a) Figūra F_1 simetriška figūrai F_2 taško O atžvilgiu.
b) Figūra F_1 simetriška figūrai F_3 tiesės d atžvilgiu.



163. *Duota*: $\triangle ABC$ — status, $\angle A = 30°$, $BC + AB = 12$ cm.
Rasti: P_{ABC}, S_{ABC}.
Sprendimas. Stačiojo trikampio statinis, esantis prieš 30° kampą, lygus pusei įžambinės, todėl $BC = \frac{1}{2}AB$, $AB = 2BC$. $BC + AB = 12$, $BC + 2BC = 12$, $BC = 4$ cm; $AB = 2 \cdot 4 = 8$ (cm). Taikydami Pitagoro teoremą gauname:
$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ (cm).
$P_{ABC} = AB + BC + CA = 8 + 4 + 4\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3}$ (cm).
$S_{ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} = 8\sqrt{3}$ (cm^2).



164. a) *Duota*: $ABCD$ — rombas, $AB = BC = CD = DA = 6{,}5$ cm, $\angle B = \angle D = 30°$.
Apskaičiuoti: S_{ABCD}.
Sprendimas. $S_{ABCD} = BC \cdot h$; $h = \frac{AB}{2} = \frac{6{,}5}{2} = 3{,}25$ (cm), nes h — stačiojo trikampio statinis, esantis prieš 30° kampą.
$S_{ABCD} = 6{,}5 \cdot 3{,}25 = 21{,}125$ (cm^2).



b) *Nurodymas.* Įsitikinkite, kad smailusis rombo kampas yra 30°.
45,125 dm^2.

165. Daugiausiai galima suvalgyti 450 g bananų.

166. a) $S_{ABC} = 3x$, $S_{BDEF} = 2(x + 1)$;
b) $3x = 2(x + 1)$, $x = 2$;
c) $2 \cdot 3x \geqslant 2(x + 1)$, $x \geqslant \frac{1}{2}$;
d) $3x \leqslant \frac{4}{3} \cdot 2(x + 1)$, $x \leqslant 8$. Kadangi x yra atstumas, tai $x > 0$. Todėl $0 < x \leqslant 8$.

167. Pagal sąlygą $18{,}6\,\text{dm} \leqslant P \leqslant 21{,}6\,\text{dm}$, $3{,}1\,\text{dm} \leqslant a \leqslant 3{,}5\,\text{dm}$. Reikia įvertinti kraštinės b ilgį. Kadangi $P = 2(a + b)$, tai $b = \frac{P}{2} - a$. Taigi $9{,}3 \leqslant \frac{P}{2} \leqslant 10{,}8$, $-3{,}5 \leqslant -a \leqslant -3{,}1$. Tada $(9{,}3 - 3{,}5)\,\text{dm} \leqslant \frac{P}{2} - a \leqslant (10{,}8 - 3{,}1)\,\text{dm}$ ir $5{,}8\,\text{dm} \leqslant b \leqslant 7{,}7\,\text{dm}$.
Atsakymas. Kita kraštinė yra ne trumpesnė už 5,8 dm ir ne ilgesnė už 7,7 dm.

168. a) $P_{\text{stačiakampio}} = (4x + 16)\,\text{cm}$, $P_{\text{kvadrato}} = (4x + 12)\,\text{cm}$.
b) $S_{\text{stačiakampio}} = (x^2 + 8x + 7)\,\text{cm}^2$, $S_{\text{kvadrato}} = (x^2 + 6x + 9)\,\text{cm}^2$.
c) Sprendžiame lygtį $4x + 16 = 4x + 12$. Ši lygtis sprendinių neturi, todėl stačiakampio ir kvadrato perimetrai negali būti lygūs.
d) Sprendžiame lygtį $x^2 + 8x + 7 = x^2 + 6x + 9$, $x = 1$. Taigi stačiakampio ir kvadrato plotai lygūs, kai $x = 1$.

169. a) $-0{,}9$; b) $-1{,}6$.

170. a) $-12x^2 + 3$; b) $3a^2 - 10a - 4$; c) $4xy$; d) $7c^2 + 7d^2$.

171. Sakykime, kad didesnysis skaičius yra x. Tada mažesnysis skaičius bus $48 - x$. Sudarome lygtį: $0{,}4x = \frac{2}{3}(48 - x)$, $x = 30$; $48 - x = 48 - 30 = 18$.
Atsakymas. Didesnysis skaičius yra 30, o mažesnysis — 18.

172. Sakykime, kad cisternos talpa yra a daℓ. Pagal sąlygą sudarome lygtį: $\frac{1}{7}a + 120 = \frac{4}{7}a$, $a = 280$.
Atsakymas. **C**.

Žr. 126 p. lentelę. 1 daℓ = 10 ℓ.

173. Pirmasis žaidėjas pirmąją monetą turi padėti į stačiakampio simetrijos centrą (stalo centrą) ir po to dėti monetas simetriškai antrojo žaidėjo padėtoms monetoms stalo centro atžvilgiu. Pabandykite pažaisti ant stačiakampio formos languoto popieriaus lapo.

174.

8.3. Simetriškos figūros

Šiame skyrelyje nagrinėjamos figūros, turinčios simetrijos ašį arba simetrijos centrą. Suprantama, kad ne visos figūros yra simetriškos pačios sau, bet yra figūrų, kurios turi ir simetrijos centrą, ir simetrijos ašį. Praeituose skyreliuose jau buvo kalbama apie pačias sau simetriškas figūras, pavyzdžiui, apskritimas yra simetriškas pats sau bet kurios tiesės, einančios per jo centrą, atžvilgiu ir yra simetriškas savo centro atžvilgiu.

Patartume šio skyrelio medžiagą nagrinėti per dvi pamokas: simetriškas figūras tiesės atžvilgiu nagrinėti vienoje, o simetriškas figūras taško atžvilgiu — kitoje pamokoje.

Pakartoti:

simetriją tiesės atžvilgiu;
simetriją taško atžvilgiu.

Išmokti:

atpažinti figūras, kurios yra simetriškos pačios sau tiesės arba centro atžvilgiu;
nubraižyti figūrą, kuri būtų simetriška pati sau tiesės arba centro atžvilgiu.

Šiame skyrelyje:

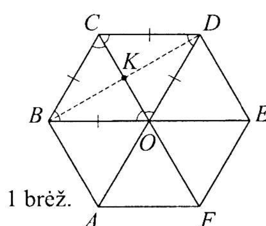
Nagrinėjamos 1) *simetriškos tiesės atžvilgiu figūros* ir 2) *simetriškos taško atžvilgiu figūros.*

1) Teorinė dalis nėra sudėtinga, todėl jos papildomai neaptarsime ir nekomentuosime. Mokytojams siūlome pradedant nagrinėti šią temą lentoje nubraižyti, pavyzdžiui, stačiakampį ir tiesę, einančią per jo priešingų kraštinių vidurio taškus, ir liepti mokiniams rasti simetrišką stačiakampį duotajam tos tiesės atžvilgiu. Galima tą patį padaryti ir su kitomis figūromis, pavyzdžiui, atkarpa, apskritimu ir pan.

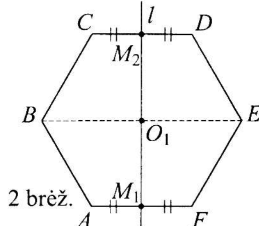
   Patariame su visais mokiniais atlikti užduoties, pateiktos smulkiu šriftu, pirmąją dalį. Pasiaiškinkite, kokia yra gautoji figūra: šešiakampis, kurio visi kampai lygūs po 120°, visos kraštinės lygios; nubrėžkite to šešiakampio įstrižaines, einančias per tašką O, ir pastebėkite, kad jos šešiakampį padalijo į 6 lygius lygiakraščius trikampius.

   Pastaba. Taisyklingieji daugiakampiai bus nagrinėjami 9 klasėje.

   Atlikdami antrąją užduoties dalį, mokiniai nesunkiai turėtų rasti visas šešias taisyklingojo šešiakampio simetrijos ašis: trys simetrijos ašys eina per šešiakampio įstrižaines, nubrėžtas per tašką O, t. y. AD, BE ir CF bei trys tiesės, einančios per kraštinių CD ir AF; DE ir AB; EF ir BC vidurio taškus.



1 brėž.



2 brėž.

   Įsitikinti, kad minėtos tiesės yra taisyklingojo šešiakampio simetrijos ašys, galima lenkiant per jas lapą. Griežtas įrodymas yra sunkesnis, ir nėra būtina jo reikalauti iš visų mokinių.

   Įrodykime, pavyzdžiui, kad tiesė CF yra nubraižyto šešiakampio simetrijos ašis (žr. 1 brėž.). Kadangi taškai C ir F yra simetriški patys sau tiesės CF atžvilgiu, tai pakanka įrodyti, kad taškas B yra simetriškas taškui D, o A — taškui E tiesės CF atžvilgiu. Įrodykime, kad taškai B ir D yra simetriški tiesės CF atžvilgiu, t. y., kad $DB \perp CF$ ir tiesė CF dalija atkarpą DB pusiau. Pastebėkime, kad trikampiai CDO ir CBO yra lygūs lygiakraščiai trikampiai, turintys bendrą kraštinę CO. Imkime CO vidurio tašką K ir sujunkime jį su trikampių viršūnėmis D ir B. Atkarpos DK ir BK yra atitinkamai trikampių CDO ir CBO aukštinės, todėl kampas DKB yra ištiestinis, t. y. atkarpos DK ir BK priklauso tiesei BD. Be to, $DK = BK$. Vadinasi, taškai B ir D yra simetriški tiesės CF atžvilgiu. Kadangi taškai B ir D yra simetriški tiesės CF atžvilgiu, tai ir atkarpos CB ir CD yra simetriškos. Analogiškai galima įrodyti, kad ir taškai A ir E yra simetriški tiesės CF atžvilgiu, o tuo pačiu ir atkarpos BA ir ED bei AF ir EF yra simetriškos. Vadinasi, keturkampis $CBAF$ yra simetriškas keturkampiui $CDEF$ tiesės CF atžvilgiu, o tuo pačiu CF yra šešiakampio $ABCDEF$ simetrijos ašis. Galima įrodyti, kad, pavyzdžiui, tiesė l, einanti per CD ir AF vidurio taškus, yra duotojo šešiakampio simetrijos ašis (žr. 2 brėž.). Pakanka įrodyti, kad taškai A, B ir C yra simetriški taškams F, E ir D tiesės l atžvilgiu. Tai įrodyti galima pasinaudojus tuo, kad BE yra šešiakampio simetrijos ašis ir pastebėjus, kad M_1 ir M_2 yra simetriški BE atžvilgiu ir, kad O_1 yra šešiakampio centras, t. y. sutampa su tašku O.

2) Pradedant nagrinėti šią temą vėl galima pasiūlyti mokiniams surasti, pavyzdžiui, stačiakampį, simetrišką duotajam stačiakampiui jo įstrižainių susikirtimo taško atžvilgiu.

   Panagrinėjus figūrų, turinčių simetrijos centrą, pavyzdžius paprašykite moksleivių išvardyti vadovėlyje 59–61 p. pavaizduotas figūras, kurios turi ne tik simetrijos ašį (ašis), bet ir simetrijos centrą, o taip pat figūras, turinčias simetrijos centrą, bet neturinčias simetrijos ašies.

   Pastaba. Reikalauti iš visų mokinių įrodymo, kad lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas yra jo simetrijos centras, nėra būtina. Pakanka, kad mokiniai sugebėtų paaiškinti, ką tai reiškia.

175–193 uždaviniai yra teminiai. Dalį jų, pavyzdžiui, 175, 180, 186, 189, galima spręsti žodžiu. Atliekant 176 ir 191 pratimus galima mokinių prašyti nurodyti simetrijos ašį (ašis) ar simetrijos centrą. 181 ir 192 rekomenduojame namų darbams, o 178, 182c ir 190 skirti gabesniems mokiniams.

194–199 pratimai yra kartojimo. Siūloma prisiminti reiškinių su kvadratinėmis šaknimis pertvarkymus (194, 195), skaidymą dauginamaisiais (196), dalies reiškimą procentais (198), variantų užrašymą (199).

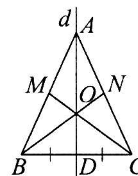
8, 9, 15, 23, 49–60

175. Tiesė d yra tik punkte e) pavaizduotos figūros simetrijos ašis.

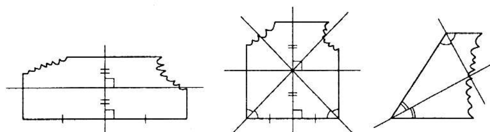
176. a) A, B, C, D, E, K, M, T, U, V; b) H, I; c) O; d) F, G, J, L, N, P, S, Z.

177. a) Lygiakraštis trikampis turi tris simetrijos ašis;
b) lygiašonis (bet ne lygiakraštis) — vieną;
c) įvairiakraštis — nė vienos;
d) statusis lygiašonis — vieną.

178. Tiesė d, einanti per lygiašonio trikampio ABC $(AB = AC)$ viršūnę A ir statmena kraštinei BC, yra šio trikampio simetrijos ašis, t. y. kraštinė AB yra simetriška kraštinei AC tiesės d atžvilgiu. Taigi šių kraštinių vidurio taškai M ir N taip pat yra simetriški tiesės d atžvilgiu. Be to, ir taškai C ir B yra simetriški tiesės d atžvilgiu. Vadinasi, pusiaukraštinės BN ir CM yra simetriškos tiesės d atžvilgiu. Todėl jos yra lygios, ir jų susikirtimo taškas priklauso aukštinei AD (tiesei d).

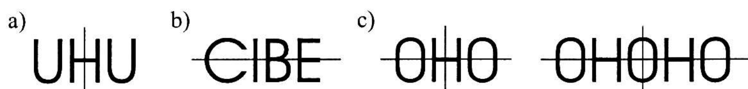


179. Figūrų simetrijos ašys pavaizduotos brėžiniuose.



180 ir **181** skirti mokinių savarankiškam darbui.

182. Pavyzdžiui:

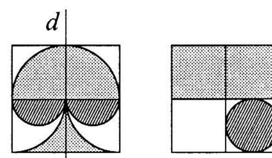


Geriau kalbėti apie raidžių rinkinius, nes sugalvoti prasmingus žodžius nėra lengva.

183. Lygiašonė trapecija turi tik vieną simetrijos ašį, nesutampančią nė su viena įstrižaine.

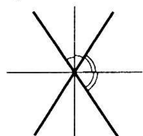
184. a) AB ir AD, BC ir CD; b) taip, jei keturkampis yra rombas arba kvadratas.

185. Pastebėkime, kad gautoji figūra užpildo pusę kvadrato ir skritulį, kurio spindulys lygus 1 cm. Taigi figūros plotas $S = \frac{1}{2} \cdot 4^2 + \pi \cdot 1^2 = (8 + \pi)\,\text{cm}^2$.

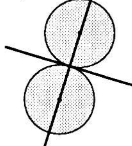


186. Simetrija.

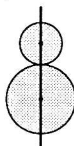
187. a)



b)



c)



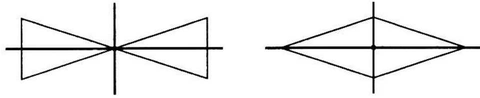
188. a) 18 cm; b) 20 cm; c) $8\sqrt{5}\,\text{cm}^2$.

189. a) Snaigės a) ir b) turi 6 simetrijos ašis, o snaigė c) — 3.
b) Simetrijos centrą turi snaigės a) ir b).
c) Reikia nupiešti šalia snaigės c) 3 žvaigždutes ir jas sujungti su snaige.

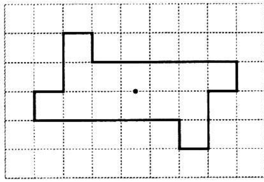
190. a) Trikampis, turintis simetrijos centrą, neegzistuoja. Simetrijos centrą gali turėti iškilieji daugiakampiai, turintys lyginį kraštinių skaičių.
b) Kampas, turintis simetrijos centrą, neegzistuoja, nes kampo viršūnė neturi jai simetriško taško.
c) Kiekvienas tiesės taškas yra jos simetrijos centras.

191. Figūros **A**, **B**, **E** turi simetrijos centrą, o **C** ir **F** — simetrijos ašį.

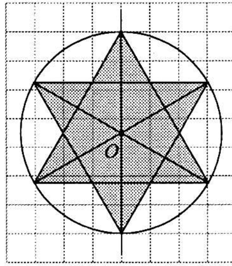
192.



193. a)



b)



194. a) $\frac{1}{3}$; b) 1; c) $\frac{1}{3}$.

195. a) $-16\sqrt{2}$; b) $8\sqrt{3}$; c) $11\sqrt{5}$; d) $7\sqrt{3}$.

196. a) $3(3x-5)(x-2)$; b) $3(x-1)(3x+4)$; c) $6x(x-2)$; d) $5x(3-2x)$.

197. a) $(x-4)^2-(x-2)(x-8)=2x$;
$1\,999\,996^2-1\,999\,998\cdot 1\,999\,992=2\cdot 2\,000\,000=4\,000\,000$;
b) $n^2-(n-1)(n+1)=1$; $19\,981\,999^2-19\,981\,998\cdot 19\,982\,000=1$.

198. $1\,\text{h}=3600\,\text{s}$, todėl $1800\,\text{s}$ sudaro $\frac{1800}{3600}\cdot 100\%=50\%$ vienos valandos.
Atsakymas. **D**.

199. a) 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222;
b) 101, 111, 121, 201, 211, 221.

8.4. Atkarpos vidurio statmens ir kampo pusiaukampinės savybės

Šiame skyrelyje nagrinėjamos atkarpos vidurio statmens ir kampo pusiaukampinės savybės. Labai svarbu žinoti šias savybes ir mokėti jas taikyti sprendžiant uždavinius.
Pagrindinis tikslas — išmokyti rasti taškus, vienodai nutolusius nuo dviejų duotųjų taškų ir nuo kampo kraštinių.

Pakartoti:

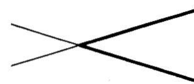
atkarpos vidurio statmens brėžimą;
kampo pusiaukampinės brėžimą;
simetriją tiesės atžvilgiu;
trikampių lygumo požymius;
atstumą nuo taško iki tiesės.

Išmokti:

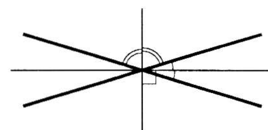
atkarpos vidurio statmens ir kampo pusiaukampinės savybes;
rasti taškus, vienodai nutolusius nuo dviejų taškų (atkarpos galų);
rasti taškus, vienodai nutolusius nuo kampo kraštinių.

Šiame skyrelyje:

1. Pirmame šio skyrelio puslapyje aiškinama ir įrodoma, kad taškai, vienodai nutolę nuo dviejų duotųjų taškų, yra tuos taškus jungiančios atkarpos vidurio statmenyje.
   Tuo tikslu įrodomos dvi teoremos. Nors šių teoremų formulavimas ir įrodymas yra nesudėtingas, bet nebūtina, kad visi mokiniai jas mokėtų. (Atkarpos vidurio statmens tiesioginė ir atvirkštinė teoremos įrodomos remiantis trikampių lygumo požymiais. Šias teoremas galima įrodyti ir remiantis simetrija. Vienos teoremos įrodymas pateiktas smulkiu šriftu.) Svarbiausia, kad mokiniai mokėtų nusakyti, kaip randame taškus, vienodai nutolusius nuo dviejų taškų, t. y.:
   1) sujungiame duotus taškus atkarpa;
   2) randame tos atkarpos vidurio tašką;
   3) per tą tašką brėžiame tiesę, statmeną atkarpai.
2. Antrame skyrelio puslapyje aiškinamasi ir įrodoma, kur yra taškai, vienodai nutolę nuo dviejų susikertančių tiesių. Praktiškai dažniausiai ieškoma taškų, vienodai nutolusių nuo kampo kraštinių. (Kampą nesunku papildyti iki dviejų susikertančių tiesių.)

   Tuo tikslu vadovėlyje įrodomos dvi teoremos. Jų formulavimas ir įrodymas yra nesudėtingas, bet visai nebūtina, kad kiekvienas mokinys jas mokėtų. Mokytojui reikėtų pasiekti, kad visi mokiniai mokėtų nusakyti, kaip rasti taškus, vienodai nutolusius nuo kampo kraštinių.
   Su stipresniais mokiniais galima pasiaiškinti, kur yra taškai, vienodai nutolę nuo dviejų susikertančių tiesių. Tai galima pateikti kaip užduotį. Mokiniai turėtų suvokti, kad taškai, vienodai nutolę nuo dviejų susikertančių tiesių, yra susidariusių gretutinių kampų pusiaukampinių taškai, ir kad tos pusiaukampinės yra statmenos viena kitai.

3. Išspręstas brėžimo uždavinys. Reikėtų nubraižyti dar du brėžinius: 1) kai galima nubraižyti tik vieną trikampį (apskritimas ir atkarpos AB vidurio statmuo turi vieną bendrą tašką); 2) kai tokio trikampio negalima nubraižyti (apskritimas ir atkarpos AB vidurio statmuo neturi bendrų taškų).

   Pastaba. Pasiūlykite gabesniems mokiniams padaryti išvadą, kada šis uždavinys turi du sprendinius, vieną sprendinį ir neturi sprendinių.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Atkarpos vidurio statmens ir kampo pusiaukampinės savybėms taikyti skirti 200–213 pratimai, 208–211 — gabesniems mokiniams. Likę uždaviniai — kartojimo: nelygybių (215) ir nelygybių sistemų (214) sprendimas, duomenų vaizdavimas variacine eilute, dažnių lentele, histograma ir vidurkio bei medianos radimas (216), bandymo baigčių nustatymas (217), reiškinio reikšmės apskaičiavimas (218), skaidymas dauginamaisiais (219), skaičiaus užrašymas standartine išraiška (220), statinio, esančio prieš 30° kampą, savybės taikymas, apskritimo ilgio ir skritulio ploto (221), trapecijos ploto (222) skaičiavimas. 223 uždavinys skirtas darbui su skaičiuokliu. Spręsdami šį pratimą mokiniai susipažins su įvairių šalių valiuta. 224 — senovinis uždavinys.

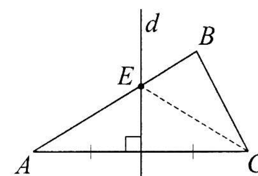
13, 14, 16–18, 20–22, 25–32

200. *Nurodymas.* Patarkite mokiniams nusibraižyti kelis įvairiakraščius trikampius su horizontaliu pagrindu ir keliant statmenį įsitikinti, kad jis kirs ilgesniąją iš kitų dviejų kraštinių. Šį teiginį įrodyti galima pasiūlyti tik stipriausiems mokiniams. Pateikiame vieną iš galimų įrodymų. Duotas įvairiakraštis trikampis ABC ir tiesė d, kuri yra AC vidurio statmuo. Kadangi $AB \neq BC$, tai taškas B nepriklauso tiesei d (nes nėra atkarpos AC vidurio statmenyje). Vadinasi, tiesė d kerta arba kraštinę AB, arba CB. Sakykime, kad tiesė d kerta kraštinę AB. Įrodysime, kad $AB > BC$. Tiesės d ir kraštinės AB susikirtimo tašką pažymėkime E.

$AE = EC$ taškas E vienodai nutolęs nuo atkarpos AC galų.

$CE + EB > BC$ (trikampio nelygybė).

$AB = AE + EB = EC + EB > BC$.



201. Smailiojo trikampio kraštinių vidurio statmenys susikerta trikampio viduje, bukojo — trikampio išorėje, o stačiojo — įžambinės vidurio taške.

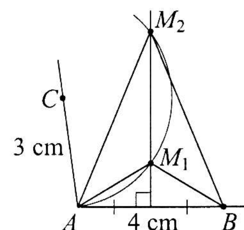
202. 1) Nubrėžiame $\angle BAC = 100°$ ir nuo viršūnės A atidedame atkarpas $AC = 3\,\text{cm}$, $AB = 4\,\text{cm}$.

2) Brėžiame atkarpos AB vidurio statmenį.

3) Iš taško C 3 cm spinduliu brėžiame apskritimą, kuris kerta statmenį taškuose M_1 ir M_2.

4) Sujungę taškus M_1 ir M_2 su taškais A ir B gauname du lygiašonius trikampius. Trikampiai AM_1B ir AM_2B — ieškomieji trikampiai.

Analogiškas uždavinys išspręstas teorinėje dalyje.

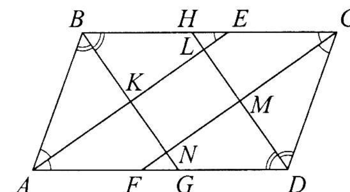


203. *Duota*: $ABCD$ — lygiagretainis, AE, BG, CF ir DH — pusiaukampinės, kurios susikirsdamos sudaro keturkampį $KLMN$.

Įrodyti: keturkampis $KLMN$ — stačiakampis.

Įrodymas. 1) Kadangi $\angle DAE = \angle AEB$ (vidaus priešiniai kampai), o $\angle DAE = \angle FCB$ (lygiagretainio priešingų kampų lygios dalys), tai $\angle AEB = \angle FCB$. Šie kampai yra atitinkamieji, gauti tieses AE ir FC perkirtus tiese BC, todėl $AE \parallel FC$. Analogiškai įrodome, kad $BG \parallel DH$. Taigi keturkampis $KLMN$ — lygiagretainis.

2) Kadangi $\angle DAB + \angle ABC = 180°$, tai $\angle KAB + \angle ABK = \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Tada $\angle BKA = \angle NKL = 90°$. Taigi keturkampis $KLMN$ — stačiakampis.



204. *Nurodymas.* Taškas D yra kraštinės AC vidurio statmens ir kraštinės BC susikirtimo taškas.

205. *Nurodymas.* Ieškomasis taškas yra kampo AOB pusiaukampinės ir apskritimo, kurio centras P ir spindulys 3 cm, susikirtimo taškas.

Su gabesniais mokiniais galima panagrinėti atvejus, kai $OP < 3\,\text{cm}$, $OP > 3\,\text{cm}$, $OP = 3\,\text{cm}$.

206. *Nurodymas.* Uždavinį patogu spręsti etapais:

1) randame taškus, vienodai nutolusius nuo dviejų pažymėtų taškų;

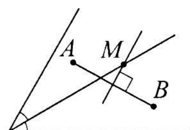
2) randame taškus, vienodai nutolusius nuo kampo kraštinių;

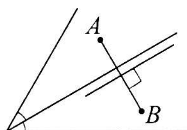
3) randame taškus, vienodai nutolusius nuo kampo kraštinių ir nuo pažymėtų taškų.

Silpnesniems mokiniams rekomenduojame pateikti 3 aukščiau išvardytus etapus atitinkančius klausimus.

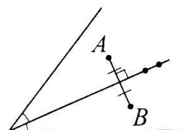
Atsakymas. Ieškomas taškas M yra kampo pusiaukampinės ir atkarpos, jungiančios duotuosius taškus A ir B, vidurio statmens susikirtimo taškas.

Pastaba. Su stipresniais mokiniais pasiaiškinkite, kad galimi tokie atvejai:





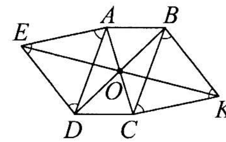
Tokio taško nėra.



Bet kuris kampo pusiaukampinės taškas tenkina uždavinio sąlygą.

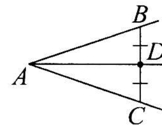
207. *Nurodymas.* Įrodykite, kad $ED = DF$ ir kad atkarpa EM yra simetriška atkarpai MF tiesės BD atžvilgiu; arba įrodykite, kad $\triangle EDM = \triangle MDF$.

208. *Duota*: $ABCD$ — lygiagretainis, O — lygiagretainio įstrižainių susikirtimo taškas, $\triangle ADE$ ir $\triangle BCK$ — lygiakraščiai.
Įrodyti: O — atkarpos KE vidurio taškas, t. y. $EO = OK$.
Įrodymas. Kadangi O — lygiagretainio simetrijos centras, tai atkarpa BC simetriška atkarpai DA, kampas KBC simetriškas kampui EDA, o kampas KCB simetriškas kampui EAD. Taigi trikampis BKC simetriškas trikampiui DEA taško O atžvilgiu. Todėl taškas K simetriškas taškui E taško O atžvilgiu. Vadinasi, taškas O priklauso atkarpai KE ir ją dalija pusiau.

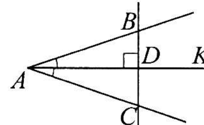


209. *Nurodymas*. Kaip ir 208 uždavinyje, įrodykite, kad kvadratai $ADEF$ ir $BCLK$ yra simetriški lygiagretainio $ABCD$ simetrijos centro atžvilgiu.

210. *Duota*: $\angle A$, $AB = AC$, $BD = DC$.
Įrodyti: Taškas D priklauso kampo pusiaukampinei.
Įrodymas. Trikampis BAC yra lygiašonis, o taškas D — kraštinės BC vidurio taškas. Vadinasi, AD — trikampio BAC pusiaukraštinė, o tuo pačiu ir aukštinė, ir pusiaukampinė. Taigi taškas D priklauso kampo A pusiaukampinei.



211. *Duota*: AK — kampo BAC pusiaukampinė, $BC \perp AK$.
Įrodyti: $AB = AC$.
Įrodymas. $\triangle ADC = \triangle ADB$ pagal kraštinę ir du lygius kampus prie jos. Todėl $AB = AC$.



212. *Nurodymas*. Ieškomasis taškas yra kampo pusiaukampinėje.

213. *Nurodymas*. Taškas C yra atkarpos AB vidurio statmens ir tiesės d susikirtimo taškas.

214. a) $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$; b) $(6; 9{,}75)$; c) $(3; +\infty)$.

215. Sakykime, kad skautai gali nuplaukti Nemunu x km.

a) Motorinės valties greitis Nemunu pasroviui yra $18 + 3 = 21$ (km/h), o prieš srovę — $18 - 3 = 15$ (km/h). Skautų kelionė užtruks $\frac{x}{21} + \frac{x}{15} = \frac{4}{35}x$ (h).
Pagal sąlygą sudarome nelygybę: $\frac{4}{35}x \leqslant 3$, $x \leqslant 26{,}25$.
Atsakymas. 26,25 km.

b) 16,875 km; c) 12 km; d) 21,6 km.

216. a) 2 kartus;

b) 0, 0, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10;

c)

Taškai	0	5	6	7	8	9	10
Dažnis	2	6	7	6	5	3	1

e) Vidurkis lygus $6\frac{11}{30}$; mediana lygi $\frac{6+7}{2} = 6{,}5$.

217. Metant monetą 3 kartus galimos tokios baigtys: hhh, hhs, hsh, shh, hss, shs, ssh, sss.

a) Įvykiui „skaičius atvirto ne mažiau nei du kartus" palankios yra šios baigtys: hss, shs, ssh, sss.

b) Įvykiui „skaičius atvirto mažiau nei du kartus" palankios yra šios baigtys: hhh, hhs, hsh, shh.

218. a) Kai $x = \sqrt{11} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{11} - \sqrt{3}$, tai $(x^2 + y^2) : xy = \big((\sqrt{11} + \sqrt{3})^2 + {} + (\sqrt{11} - \sqrt{3})^2\big) : (\sqrt{11} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{3}) = (11 + 2\sqrt{33} + 3 + 11 - 2\sqrt{33} + {} + 3) : (\sqrt{11} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{3}) = \frac{28}{\sqrt{11}+\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{3}) = \frac{28(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{\sqrt{11}+\sqrt{3}} = {} = \frac{28(\sqrt{11}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{11}+\sqrt{3})(\sqrt{11}-\sqrt{3})} = \frac{28(\sqrt{11}-2\sqrt{33}+3)}{11-3} = 7(7 - \sqrt{33})$.

Pastaba. Jeigu sąlygos reiškinys būtų $(x^2 + y^2) : (xy)$, tai reiškinio reikšmė, kai $x = \sqrt{11} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{11} - \sqrt{3}$, būtų $\big((\sqrt{11} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{11} - \sqrt{3})^2\big) : {} : \big((\sqrt{11} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{3})\big) = 28 : (11 - 3) = 3{,}5$. Sąlygos užrašas gana dviprasmiškas. Geriau spręsti variantą su (xy).

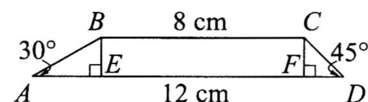
b) Kai $x = 3 + \sqrt{5}$, $y = 3 - \sqrt{5}$, tai
$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = \big(3 + \sqrt{5} - (3 - \sqrt{5})\big)^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$.

219. a) $7(b - 3)(b + 3)$; b) $3(6 - a)(6 + a)$;
c) $(y^2 - 4)(y^2 + 4) = (y - 2)(y + 2)(y^2 + 4)$;
d) $(9 - x^2)(9 + x^2) = (3 - x)(3 + x)(9 + x^2)$;
e) $x(x + 4)^2$; f) $a^2(a - 3)^2$.

220. a) $8{,}5 \cdot 10^{-5}$; b) $6{,}2 \cdot 10^5$; c) $2{,}56 \cdot 10^{-6}$; d) $9{,}07 \cdot 10^6$.

221. a) 10; b) 20π; c) 100π.

222. *Duota*: $AD = 12\,\text{cm}$, $BC = 8\,\text{cm}$, $\angle A = 30°$, $\angle D = 45°$.
Apskaičiuoti: S_{ABCD}.
Sprendimas. $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot h = \frac{8+12}{2} \cdot h = 10h$.
Nubrėžiame trapecijos aukštines $BE = CF = h$. $\triangle CFD$ — status lygiašonis, tai $FD = CF = h$. Kadangi $AD = 12\,\text{cm}$, tai $AE = 12 - 8 - h = 4 - h$. $\triangle AEB$ — status, BE — statinis, esantis prieš 30° kampą, tai $AB = 2BE = 2h$. Taikydami Pitagoro teoremą gauname: $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{(2h)^2 - h^2} = \sqrt{3h^2} = h\sqrt{3}\,(\text{cm})$. Todėl $h\sqrt{3} = 4 - h$, $h\sqrt{3} + h = 4$, $h = \frac{4}{\sqrt{3}+1} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{3-1} = 2(\sqrt{3}-1)\,(\text{cm})$.
Tada $S_{ABCD} = 10 \cdot 2(\sqrt{3}-1) = 20(\sqrt{3}-1)\,(\text{cm}^2)$.



Tai sunkus uždavinys, ir jį galėtų spręsti tik labai geri mokiniai.

223. a) *I būdas.* 500 IRP atitinka $500 : 0{,}787564 = 634{,}86903\ldots$ (EUR), t. y. $4{,}3208 \cdot 634{,}86903 \approx 2743{,}14$ (LTL).

Atkreipkite mokinių dėmesį, kad šiuo metu valiutų kursai yra pasikeitę, bet jų tarpusavio santykiai liko beveik tie patys.

1 EUR — 0,787564 IRP
x EUR — 500 IRP

1 EUR — 4,3208 LTL
x EUR — y LTL

II būdas. Pagal valiutų atitikmens tarptautiniuose atsiskaitymuose antrąją schemą $y = (4{,}3208 \cdot x)$ LTL, o pagal pirmąją — $x = \frac{500}{0{,}787564}$ EUR, taigi $y = 4{,}3208 \cdot \frac{500}{0{,}787564} = 4{,}3208 : 0{,}787564 \cdot 500 \approx 2743{,}14$ (LTL);

b) 500 AUS atitinka $500 : 13{,}7603 = 36{,}336417\ldots$ (EUR), t. y. $4{,}3208 \cdot 36{,}336417 \approx 157{,}00$ (LTL);
arba 500 AUS atitinka $4{,}3208 : 13{,}7605 \cdot 500 \approx 157{,}00$ (LTL);

c) 12,98 LTL; d) 1,12 LTL.

Pastaba. Galima apibendrinti antrąjį sprendimo būdą: jeigu tarptautiniuose atsiskaitymuose vienas euras (EUR) atitinka a LTL, o vienas euras (EUR) atitinka tam tikros šalies b piniginių vienetų, tai tos šalies A piniginių vienetų atitinka $(a : b \cdot A)$ LTL.

224. Sprendžiame lygtį $\pi R^2 = (\frac{8}{9} \cdot 2R)^2$, $\pi \approx 3{,}16$.

9. TIESIOGINIS IR ATVIRKŠTINIS PROPORCINGUMAS

Šiame skyriuje nagrinėjama dviejų dydžių tarpusavio priklausomybė. Dviejų dydžių priklausomybės pavyzdžių nesunkiai galima rasti mus supančioje aplinkoje, pavyzdžiui: nuvažiuotas kelias priklauso nuo važiavimo greičio, vandens aukštis akvariume — nuo įpilto vandens kiekio, auštančio vandens temperatūra arbatinuke — nuo aušimo laiko. Taip pat nesunku rasti dviejų dydžių tarpusavio priklausomybės pavyzdžių ir matematikoje, pavyzdžiui, kvadrato perimetras ir plotas priklauso nuo jo kraštinės ilgio, daugiakampio kampų suma — nuo jo viršūnių skaičiaus ir pan. Dviejų dydžių tarpusavio priklausomybė gali būti aprašyta įvairiai: 1) žodžiais, 2) lentele, 3) grafiku, 4) formule.

Šiame skyriuje nagrinėsime tik *funkcines* dviejų dydžių priklausomybes, t. y., kai *kiekvieną* vieno dydžio reikšmę atitinka *vienintelė* kito dydžio reikšmė. Tai aptariama pirmame skyrelyje. Antrame skyrelyje nagrinėjamos labai svarbios dviejų dydžių priklausomybės — tiesioginis ir atvirkštinis proporcingumas. Nagrinėjami dydžiai, įgyjantys tik *teigiamąsias* reikšmes, sprendžiami su realiu gyvenimu susiję uždaviniai. (Tiesioginio ir atvirkštinio proporcingumo funkcijos bus nagrinėjamos 9 klasėje.) Paskiausiai, 3 skyrelyje, nagrinėjamos panašių figūrų įvairių elementų (kraštinių, kampų, perimetrų, plotų) priklausomybės.

Pastaba. Paprastai ir vaizdžiai proporcingumas aprašytas knygose: „Tikslieji mokslai humanitarams“, I dalis, 3 skyrius; II dalis, 7 skyrius.

9.1. Dviejų dydžių tarpusavio priklausomybė. Funkcija

Praktinėje veikloje dažnai susiduriame su įvairiausiais dydžiais, reiškiniais ir procesais, kurių dėsningumus galima įvairiai aprašyti.

Šiame skyrelyje įvedama *funkcijos* sąvoka — kaip dviejų kintamųjų dydžių tarpusavio priklausomybė. Ši priklausomybė nusakoma formule, lentele ar grafiku.

Pastaba. Funkcija gali būti aprašyta ir žodžiais. Nors teorinėje dalyje apie tai neužsimenama, tačiau rasite tokių pratimų (229, 230).

Pakartoti:

grafiko braižymą;

kelio formulę $s = v \cdot t$;

kūno masės formulę $m = \rho \cdot V$.

Išmokti:

dviejų dydžių tarpusavio priklausomybę užrašyti formule, sudaryti reikšmių lentelę ir nubraižyti grafiką;

kas yra funkcija, funkcijos apibrėžimo sritis ir reikšmių sritis;

nustatyti funkcijos savybes iš grafiko;

apskaičiuoti funkcijos, apibrėžtos formule, reikšmę, kai žinomas argumentas;

apskaičiuoti argumentą, kai žinoma funkcijos, apibrėžtos formule, reikšmė.

Šiame skyrelyje:

1. Nagrinėjant 1 pavyzdį parodoma, kaip galima užrašyti nuvažiuoto kelio priklausomybę nuo važiavimo laiko, kai greitis yra pastovus. Pirmiausia tai užrašoma formule, po to lentele ir galiausiai grafiku.

   Pastaba. Šis pavyzdys bus toliau nagrinėjamas 2 skyrelyje — aiškinant tiesioginį proporcingumą.

   Įvedamos *priklausomo kintamojo* ir *nepriklausomo kintamojo* sąvokos.

2. Pateiktas funkcijos apibrėžimas:

   > *Kintamasis y yra kintamojo x funkcija, jeigu kiekvieną kintamojo x reikšmę atitinka vienintelė kintamojo y reikšmė.*

   Pastaba. Nebūtina, kad visi mokiniai mokėtų funkcijos apibrėžimą, svarbiau, kad mokiniai suprastų užrašą $y = f(x)$.

   Paaiškinama, kad visos galimos nepriklausomo kintamojo reikšmės sudaro funkcijos apibrėžimo sritį, o įgyjamos priklausomo kintamojo reikšmės — funkcijos reikšmių sritį.

3. Išnagrinėtas 2 pavyzdys, kur dviejų dydžių tarpusavio priklausomybė užrašoma *formule.*

   Svarbu, kad mokiniai suprastų, jog reikiamas vandens *kiekis* priklauso nuo *aukščio*, iki kurio norime pripildyti akvariumą. Šiuo atveju ta priklausomybė užrašoma *formule* $V = 24h$. Reikėtų su mokiniais pasiaiškinti, kad norint, jog vandens aukštis akvariume būtų, pavyzdžiui, 1 dm, reikia 24 dm^3 (24 ℓ) vandens; 2 dm — 48 ℓ; 2,5 dm — 60 ℓ, o tai patogu apskaičiuoti taikant formulę. Pagal formulę galite apskaičiuoti ir koks bus vandens aukštis akvariume, kai žinomas turimo vandens tūris, pavyzdžiui, jei įpilsime 84 litrus vandens, tai jo aukštis akvariume bus 3,5 dm.

   Be to, būtina išsiaiškinti, kas šiame pavyzdyje yra nepriklausomas kintamasis ir kas priklausomas kintamasis bei funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis.

4. Paaiškinama, kad praktikoje priklausomybė tarp dviejų kintamųjų dydžių dažnai nusakoma grafiškai. Iš grafikų galima spręsti apie įvairių reiškinių kitimą, jų ypatumus. Tai iliustruojama 3 pavyzdžiu.

   Pastaba. Reikėtų atkreipti dėmesį, kad ne kiekviena plokštumos kreivė yra funkcijos grafikas. Vadovėlyje šis faktas pateiktas smulkiu šriftu.

225–238 pratimai yra teminiai. Tai dviejų dydžių tarpusavio priklausomybės užrašymas formule (225, 235a, 236a), grafikų skaitymas (226, 227, 231, 234) ir braižymas bei lentelių sudarymas (227, 229, 230, 237c), funkcijos, apibrėžtos formule, reikšmės radimas, kai duotas argumentas (232, 235b, 236c, 237a,b), ir atvirkščiai — argumento radimas, kai žinoma funkcijos reikšmė (233, 235c, 236d), apibrėžimo srities (234a, 236b) ir reikšmių srities nustatymas (234a).

239–251 pratimai skirti kartojimui. Pitagoro teoremą, atstumą tarp dviejų taškų, trapecijos perimetrą ir plotą, ritinio tūrį prisiminsite spręsdami 239, 240, 242 ir 243 pratimus. Be to, galite pakartoti nelygybių (241, 245), nelygybių sistemų (246), lygčių (244, 249) sprendimą, reiškinių prastinimą (247) ir palyginimą (248), atlyginimo skaičiavimą (250) bei tikimybių teorijos elementus (251).

225. a) $P(x) = 4x + 8$, $S(x) = x^2 + 4x$; čia x — trumpesniosios kraštinės ilgis;
b) $P(x) = 4x + 10$, $S(x) = x^2 + 5x$; čia x — trumpesniosios kraštinės ilgis.

226. a) Eglės aukštis — 6 m, 22,5 m, 39,5 m; beržo — 8 m, 17,5 m, 30 m;
b) eglė — 18 metų, 27 metų, 43 metų; beržas — 13 metų, 24 metų, 65 metų;
c) 30 metų;
d) eglė užaugo 6 m, beržas — 8 m; eglė — 15 m, beržas — 8 m;
e) 40 metų; f) 43 metai.

227. Uždavinys analogiškas 226 uždaviniui, tik čia grafiką turės nusibraižyti patys mokiniai.

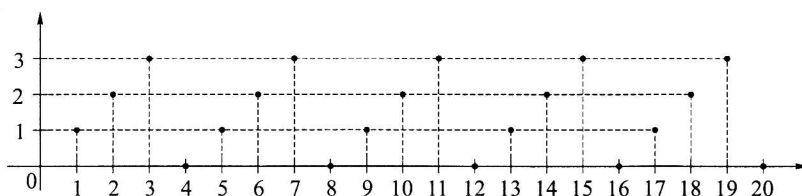
228. a) **F**; b) **E**; c) **A**; d) **B**; e) **C**; f) **D**.

229. a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

Paprašykite mokinių pastebėti dėsningumą ir, pavyzdžiui, pratęsti lentelę pradedant skaičiumi 2000.

b)



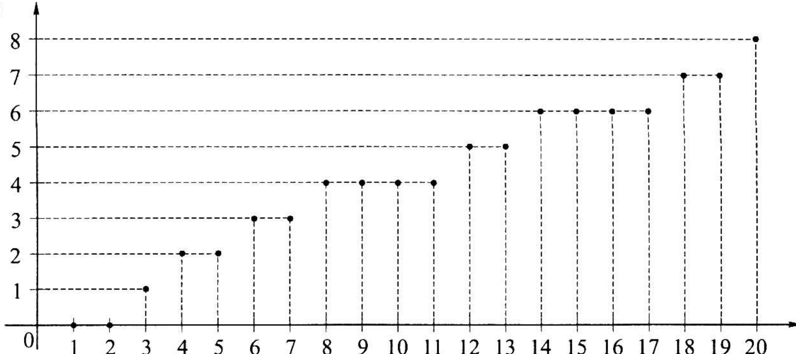
Atkreipkite dėmesį, kad *nereikia* jungti taškų, nes funkcija apibrėžta tik natūraliaisiais skaičiais nuo 1 iki 20.

230. a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	6	7	7	8

Pirminiai skaičiai (2, 3, 5, 7, 11, ...) turi tik du daliklius: 1 ir patį skaičių. Skaičius 1 nėra nei pirminis, nei sudėtinis.

b)



Čia irgi būtų klaidinga jungti taškus.

231. a)

H	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	760	680	600	530	460	400	350	300	270	230	200

b) 1) 360 mm; 2) 230 mm; 3) 4,3 km.

232. a) $f(-1) = -10$, $f(3) = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$, $f(-0{,}5) = -20$;
b) $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{2}$, $f(-0{,}5) = -\frac{1}{5}$;
c) $f(-1) = -1\frac{2}{3}$, $f(3) = 1$, $f(-0{,}5) = -1\frac{1}{3}$.

233. a) $1{,}5x + 4 = 15$, $x = 7\frac{1}{3}$; b) $12 - \frac{7}{3}x = 15$, $x = -\frac{9}{7}$.

234. a) Apibrėžimo sritis — $[-5; 7]$; reikšmių sritis — $[-2; 3]$;
b) $f(x) = 0$, kai $x \approx 1{,}3$ ir $x = 6$;
c) $f(-3{,}5) = 2{,}3$; $f(-1) = 2{,}1$; $f(-0{,}5) = 1{,}5$; $f(3{,}5) = -1{,}4$; $f(6{,}5) = 1$;
d) $f(x) = 1$, kai $x = -5$, $x = 0$ ir $x = 6{,}5$; $f(x) = -1{,}5$, kai $x = 3{,}7$ ir $x = 5{,}5$;
e) funkcijos reikšmės yra teigiamos intervaluose $[-5; 1{,}3)$ ir $(6; 7]$, o neigiamos — intervale $(1{,}3; 6)$.

Apibrėžimo srities ir reikšmių srities žymėjimai (D ir E) bus įvesti 9 klasėje.

235. a) $S(x) = 2x$; b) $S(2{,}5) = 5$; $S(0{,}75) = 1{,}5$; c) 5,3.

236. a) $f(x) = 420 - 30x$; b) $0 \leqslant x \leqslant 14$; c) $f(5) = 270$; d) 10.

237. a)

x	$-3{,}5$	$-2{,}5$	$-1{,}5$	$-0{,}5$	$-1{,}25$	$0{,}5$	$1{,}5$	$2{,}5$	$3{,}5$
$f(x)$	-9	-5	-1	3	0	7	11	15	19

b)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	15	5	-1	-3	-1	5	15	29

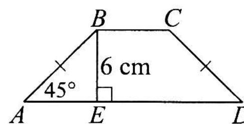
c) Koordinačių plokštumoje atidėkite taškus $(x; y)$, t. y. $(x; f(x))$. Juos sujungę gausite funkcijų grafikus: a) — tiesę, o b) — parabolę.

Tiesinės ir kvadratinės funkcijų grafikai bus nagrinėjami 9 klasėje.

238. a) Patikrinkime, ar taškas $A(-3; -7)$ priklauso funkcijos, apibrėžtos formule $f(x) = 2x - 1$, grafikui. Kai $x = -3$, tai $2x - 1 = 2 \cdot (-3) - 1 = -7$, o tai yra taško A ordinatė. Taigi taškas A priklauso grafikui. Analogiškai patikriname, ar kiti taškai priklauso grafikui.
Atsakymas. Taškai A ir D grafikui priklauso, o B ir C — nepriklauso.
b) Taškas A priklauso grafikui, o B, C ir D — nepriklauso.

239. a) *Nurodymas.* Trapecijos įstrižainės ilgį apskaičiuosite iš stačiojo trikampio BED; $ED = 5 - \frac{5-3}{2} = 4\,(\text{cm})$.
b) *Nurodymas.* Iš stačiojo trikampio apskaičiavę trapecijos aukštinę turėsite uždavinį, analogišką a) punktui.
c) *Duota*: $ABCD$ — lygiašonė trapecija, $AB = CD$, $BE = 6\,\text{cm}$, $\angle A = 45°$, $S_{ABCD} = 84\,\text{cm}^2$.
Rasti: P_{ABCD}.
Sprendimas. $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$. Kadangi $AB = CD$, tai $P_{ABCD} = 2AB + BC + AD$. Duota, kad $S_{ABCD} = 84\,\text{cm}^2$, tai $\frac{BC+AD}{2} \cdot 6 = 84$, $BC + AD = 28\,\text{cm}$. Kadangi $\triangle AEB$ — status lygiašonis, tai $AE = 6\,\text{cm}$. Taikydami Pitagoro teoremą gauname: $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$. Taigi $P_{ABCD} = 2 \cdot 6\sqrt{2} + 28 = (12\sqrt{2} + 28)\,\text{cm}$.
Atsakymas. a) $2\sqrt{3}\,\text{cm}$; b) $7\,\text{dm}$; c) $(12\sqrt{2} + 28)\,\text{cm}$.

Paklauskite mokinių, kam lygi įstrižainė AC.



240. *Nurodymas.* Iš brėžinio matyti, kad trapecijos viršūnių ir taškų E ir F koordinatės yra: $A(-6; 6)$, $B(-2; 9)$, $C(6; 5)$, $D(6; 0)$, $E(0; 3)$ ir $F(2; 7)$. Taikydami atstumo tarp dviejų taškų formulę apskaičiuokite atkarpų AD, BC ir EF ilgius.
Atsakymas. 50 (kv. v.).

Pasiūlykite mokiniams apskaičiuoti plotą skaičiuojant pilnus ir nepilnus langelius, t. y. prie pilnų langelių skaičiaus pridėti nepilnų langelių skaičių, padalytą iš dviejų.

241. $(n + 3)^2 < n^2 + 27$; $n = 1; 2$.

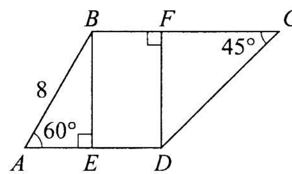
242. a) $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 14 = 504\pi\ (\text{cm}^3)$;
b) $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 7 = 63\pi\ (\text{cm}^3)$.
Galima pastebėti, kad b) punkte pavaizduotos dėžutės pagrindo spindulys ir aukštinė yra 2 kartus trumpesni už a) punkte pavaizduotos dėžutės pagrindo spindulį ir aukštinę, todėl jos tūris bus $2^3 = 8$ kartus mažesnis, t. y. $504\pi : 8 = 63\pi(\text{cm}^2)$.

Šio skyriaus 3 skyrelyje bus skaičiuojami panašių figūrų perimetrų, plotų ir tūrių santykiai. (Apie panašių erdvinių kūnų tūrių santykį plačiau bus kalbama 10 klasėje.)

243. a) Aukštinė lygi 9 cm, šoninė kraštinė — $\sqrt{106}\,\text{cm}$.

Sąlygoje nepasakyta, kurią šoninę kraštinę reikia apskaičiuoti, bet šiuo atveju aukštinė sutampa su viena šonine kraštine.

b) Nubrėžkime trapecijos aukštines BE ir DF. Stačiajame trikampyje AEB $\angle ABE = 30°$, todėl $AE = \frac{1}{2}AB = 4$. Vadinasi, $ED = BF = 8 - 4 = 4$. Kita vertus, $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 64 - 16 = 48$, $BE = 4\sqrt{3}$. Kadangi $BE = DF = FC$, tai $BC = BF + FC = 4 + 4\sqrt{3}$. Iš stačiojo trikampio DFC taikydami Pitagoro teoremą gauname:
$DC^2 = DF^2 + FC^2 = (4\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 = 96$, $DC = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.



244. Sprendžiame lygtį $(x+30)^2 = 90^2 + x^2$, $x = 120\,\text{cm}$.

245. a) 8 paros, praleistos „Poilsyje", kainuoja 2400 Lt, o „Pūkelyje" — 2500 Lt; 21 para, praleista „Poilsyje", kainuoja 6300 Lt, o „Pūkelyje" — 5750 Lt.
b) Už n parų, praleistų „Poilsyje", Petraitis sumokės $300n$ Lt, o „Pūkelyje" — $(250n + 500)$ Lt.
c) Mažiausiai Petraitis turi praleisti 1 parą.
Pastaba. Uždavinyje reikėtų klausti „Kiek parų *daugiausiai* turi praleisti ..." Tada atsakymas būtų: 9 paras, o jį gautume spręsdami nelygybę $300n < 250n + 500$. Iš čia $n < 10$.

246. Sakykime, kad Giedrius turi x kasečių, tada Marius turės $(60 - x)$ kasečių. Sudarome nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} x - 4 < 3(60 - x + 4), \\ x + 3 > 4(60 - x - 3); \end{cases} \quad \begin{cases} x < 49, \\ x > 45. \end{cases}$$

Taigi Giedrius gali turėti 46, 47 arba 48 kasetes. Tuomet Marius atitinkamai turės 14, 13 arba 12 kasečių.

247. a) $2x^2$; b) $2ab$; c) $9x^6y^{-4}$; d) $4x^4y^3$.

248. a) $7\sqrt{\frac{1}{7}} = \sqrt{7^2 \cdot \frac{1}{7}} = \sqrt{7}$; $\frac{1}{2}\sqrt{22} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 22} = \sqrt{5\frac{1}{2}}$.
Kadangi $\sqrt{7} > \sqrt{5\frac{1}{2}}$, tai $7\sqrt{\frac{1}{7}} > \frac{1}{2}\sqrt{22}$;
b) $\frac{1}{2}\sqrt{56} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 56} = \sqrt{14}$; $9\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{9^2 \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt{13\frac{1}{2}}$.
Kadangi $\sqrt{14} > \sqrt{13\frac{1}{2}}$, tai $\frac{1}{2}\sqrt{56} > 9\sqrt{\frac{1}{6}}$.

249. a) -3; $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{3}$; 2; c) -1; 3; d) -4; 2.

250. a) Sakykime, kad priskaičiuotas mėnesinis atlyginimas yra A. Sprendžiame lygtį $(A - 242) \cdot 0{,}33 = 217{,}14$; $A = 900$ Lt.
b) 975 Lt; c) 1050 Lt; d) 1250 Lt.

251. a) $(1,4)$; $(2,3)$; $(3,2)$; $(4,1)$;
b) $(1,5)$; $(2,4)$; $(3,3)$; $(4,2)$; $(5,1)$;
c) $(1,6)$; $(2,5)$; $(3,4)$; $(4,3)$; $(5,2)$; $(6,1)$;
d) $(2,6)$; $(3,5)$; $(4,4)$; $(5,3)$; $(6,2)$.

9.2. Dviejų dydžių tiesioginis ir atvirkštinis proporcingumas

Šiame skyrelyje nagrinėjami tarpusavyje susiję dydžiai, kurie gali įgyti tik teigiamąsias reikšmes, o tų dydžių atitinkamų reikšmių santykiai arba sandaugos yra lygios, t. y. *tiesiogiai* ir *atvirkščiai proporcingi* dydžiai. Su tiesioginiu proporcingumu mokiniai jau buvo susipažinę 6 klasėje.

Tiesiogiai ir atvirkščiai proporcingi dydžiai teorinėje dalyje nagrinėjami remiantis su kelio formule susietais realiais pavyzdžiais.

Patartume šios temos mokyti etapais:

1) nagrinėti tiesiogiai proporcingus dydžius (teorinės dalies 1 pavyzdys, 252–264 uždaviniai);
2) nagrinėti atvirkščiai proporcingus dydžius (teorinės dalies 2 pavyzdys, 265–268 uždaviniai);
3) spręsti uždavinius, susijusius ir su tiesiogiai, ir su atvirkščiai proporcingais dydžiais (275, 276).

Pakartoti kelio formulę $s = vt$.

Išmokti:

nustatyti, ar du dydžiai yra tiesiogiai (atvirkščiai) proporcingi;
rasti tiesiogiai (atvirkščiai) proporcingų dydžių proporcingumo koeficientą;
nubraižyti tiesiogiai ir atvirkščiai proporcingų dydžių grafikus.

Šiame skyrelyje:

Nagrinėjami *tiesiogiai proporcingi dydžiai* ir *atvirkščiai proporcingi dydžiai.*

1. Plačiau nagrinėjamas praeito skyrelio 1 pavyzdys. Remiantis šiuo pavyzdžiu apibrėžiamas dviejų dydžių tiesioginis proporcingumas:

Du dydžiai vadinami tiesiogiai proporcingais, jeigu jų atitinkamų reikšmių santykiai yra lygūs.

Skaičius, kuriam lygūs tiesiogiai proporcingų dydžių atitinkamų reikšmių santykiai, vadinamas *proporcingumo koeficientu.*

Pateikiamas ir kitas dviejų dydžių tiesioginio proporcingumo apibrėžimas:

Du dydžiai yra tiesiogiai proporcingi, jeigu vieno dydžio reikšmei kelis kartus padidėjus (sumažėjus) kito dydžio reikšmė tiek pat kartų padidėja (sumažėja).

Pastaba. Apibrėžimu galima laikyti vieną iš jų, tai kitas bus tiesioginio proporcingumo savybė.

Nubraižytas dviejų tiesiogiai proporcingų dydžių grafikas — spindulys, kurio pradžia sutampa su koordinačių pradžia.

2. Atvirkščiai proporcingi dydžiai nagrinėjami panašiai kaip tiesiogiai proporcingi dydžiai. Remiantis 2 pavyzdžiu apibrėžiamas dviejų dydžių atvirkštinis proporcingumas:

Du dydžiai vadinami atvirkščiai proporcingais, jeigu jų atitinkamų reikšmių sandaugos yra lygios.

Skaičius, kuriam lygios atvirkščiai proporcingų dydžių atitinkamų reikšmių sandaugos, vadinamas *atvirkštinio proporcingumo koeficientu.*

Pateikamas ir kitas dviejų dydžių atvirkštinio proporcingumo apibrėžimas:

Du dydžiai yra atvirkščiai proporcingi, jeigu vieno dydžio reikšmei kelis kartus padidėjus (sumažėjus) kito dydžio reikšmė tiek pat kartų sumažėja (padidėja).

Nubraižytas dviejų atvirkščiai proporcingų dydžių grafikas — viena hiperbolės šaka.

Pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad nagrinėjami tik dydžiai, kurių reikšmės yra teigiamos. Tačiau uždavinyne yra uždavinių, kuriuose teisioginio proporcingumo funkcija $f(x) = ax$ gali įgyti ir neigiamas reikšmes (9 skyrius, 12, 13, 14, 15, 29 uždaviniai). Šiuos uždavinius spręsti nėra būtina. (Funkcijos $y = ax$ ir $y = \frac{a}{x}$ bus nagrinėjamos 9 klasėje.)

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Dviejų dydžių tiesioginiam proporcingumui skirti 252–264, 275a, 276 pratimai, o atvirkštiniam proporcingumui — 265–268, 272–274, 275b, 276.

Likę pratimai — kartojimo. Pravartu prisiminti Pitagoro teoremą ir trapecijos perimetrą (269, 270), ritinio tūrį (271), tapatybių įrodymą (278), lygčių sudarymą ir sprendimą (279), dvigubų nelygybių sprendimą (281), duomenų tvarkymą ir vaizdavimą (280), didžiausią bendrą daliklį (282), ilgio matavimo vienetus (283).

252. a) Dydžiai x ir y yra tiesiogiai proporcingi, jų proporcingumo koeficientas lygus $\frac{1}{4}$.

Čia laikėme, kad dydis y priklauso nuo dydžio x, todėl proporcingumo koeficientą gavome $\frac{1}{4}$, o ne 4.

b) Dydžiai x ir y nėra tiesiogiai proporcingi, nes jų santykiai nelygūs.

253. a)

I	Apskritimo spindulys (cm)	2	1,5	1	0,5
II	Apskritimo ilgis (cm)	4π	3π	2π	π
III	Spindulio kvadratas	4	2,25	1	0,25
IV	Skritulio plotas (cm^2)	4π	$2,25\pi$	π	$0,25\pi$

Paklauskite mokinių, kokiais matavimo vienetais išreikštas spindulio kvadratas.

b) I ir II eilutės dydžiai yra proporcingi; I ir IV — nėra proporcingi; III ir IV — proporcingi.

254. Punktuose a), c), d), e), f), g), i) išvardyti dydžiai yra tiesiogiai proporcingi.

255. a) $\frac{4,5}{2,5} \cdot x = 1,8x$ (Lt); b) $1,8 \cdot 4 = 7,2$ (Lt);
c) 10 kg obuolių kainuos $1,8 \cdot 10 = 18$ (Lt).

256. a)

x	2	4	5	7	10	12,5	15,625
y	3,2	6,4	8	11,2	16	20	25

$\frac{y}{x} = \frac{8}{5} = 1,6$

b)

x	1	4	8	9	16	22	28
y	0,25	1	2	2,25	4	5,5	7

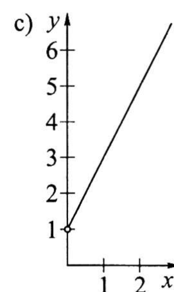
$\frac{x}{y} = \frac{9}{2,25} = 4$

257. a) 1368 kg; b) 320 m.

258. a) $y = 2x + 1$; b)

x	1	2	3	4	5	6
y	3	5	7	9	11	13

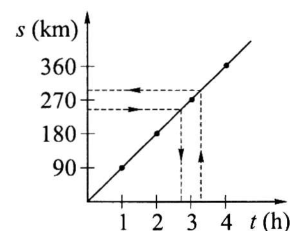
c)



d) kadangi, pavyzdžiui, $\frac{3}{1} \neq \frac{5}{2}$, tai priklausomybė nėra tiesioginis proporcingumas. Be to, tiesioginio proporcingumo grafikas yra spindulys, kurio pradžia *sutampa* su koordinačių pradžia.

259. Kreidos tankis $\rho = \frac{11,9}{7} = 1,7$ (g/cm^3); granito tūris $V = \frac{567}{2,7} = 210$ (dm^3); aliuminio masė $m = 20 \cdot 2,6 = 52$ (g).
Pastaba. Mokiniams kūno masės priklausomybė nuo tūrio yra sunkiai suvokiama, nors apskritai formulė $m = \rho \cdot V$ yra analogiška kelio formulei $s = v \cdot t$. Siūlome neapsiriboti vien lentelės užpildymu. Ypač atkreipkite dėmesį į tankio sąvoką. Paaiškinkite, pavyzdžiui, kad vienodi kreidos, aliuminio ir granito kubeliai sveria nevienodai (paprašykite nustatyti, kas sveria daugiau — 1 cm^3 kreidos, aliuminio ar granito). Visi mokiniai turėtų suvokti, kad kuo didesnis medžiagos tankis, tuo ji yra sunkesnė (analogiškai — kuo greitis didesnis, tuo nuvažiuojama toliau). Taip pat svarbu, kad mokiniai suvoktų tankio matavimo vienetus (analogiškai — kaip greitis matuojamas, pavyzdžiui, kilometrais per valandą (km/h), taip tankis matuojamas, pavyzdžiui, gramais į kubinį centimetrą (g/cm^3)). Pratinkite vienus greičio ir tankio matavimo vienetus versti kitais. Paklauskite mokinių, pavyzdžiui, kiek gramų sveria 1 dm^3 ir kiek — 1 cm^3 granito, kiek sveria litras ir kiek cm^3 užima tona vandens.

260. $V = 25 \cdot 20 \cdot 12 = 6000$ (cm^3) $= 6$ (dm^3); $m = 6 \cdot 19,32 = 115,92$ (kg).
Taigi tiek sveriantį aukso luitą tikrai nebūtų lengva parsinešti.

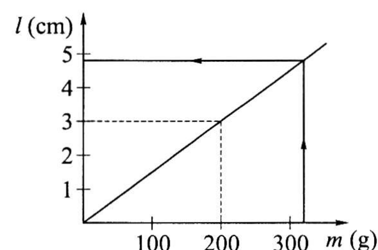


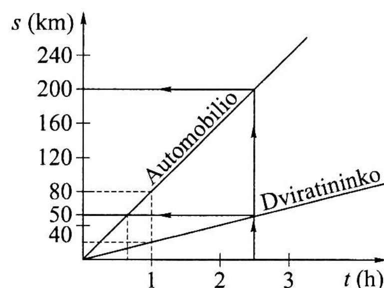
261. a) ≈ 300 km; b) ≈ 2 h 45 min.
Pastaba. Atsakius į klausimus galima pasiūlyti mokiniams tiek kelią, tiek laiką apskaičiuoti tiksliai ir palyginti su rezultatais, nustatytais iš grafiko.

262. Grafiką braižyti kaip ir 261 uždavinio.

263. a) x ašyje atidėkime svarelio masę m gramais, o y ašyje — spyruoklės pailgėjimą l centimetrais. Kadangi l tiesiogiai proporcingas m, tai grafikas yra spindulys, kurio pradžia sutampa su koordinačių pradžia. Raskime dar vieną šiam spinduliui priklausantį tašką. Kai $m = 200$ g, tai $l = 18 - 15 = 3$ (cm). Taigi taškas (200; 3) priklauso grafikui. Per taškus (0; 0) ir (200; 3) brėžiame spindulį.

b) Iš grafiko matyti, kad pakabinus 320 g svarelį spyruoklė pailgėja maždaug 4,8 cm. Todėl spyruoklės ilgis yra $15 + 4,8 = 19,8$ (cm). Gautą rezultatą patikriname skaičiuodami:
pakabinus 200 g svarelį spyruoklė pailgėja 3 cm,
pakabinus 320 g svarelį spyruoklė pailgėja x cm.
Taigi $x = \frac{320 \cdot 3}{200} = 4,8$ (cm).





264. a) Dviratininko ir automobilio nuvažiuotų kelių grafikai parodyti brėžinyje.

b) Iš grafiko matyti, kad po 2,5 h atstumas tarp dviratininko ir automobilio yra $200 - 50 = 150$ (km).

c) Automobilis vietovę, esančią už 50 km nuo Alytaus, pravažiuoja maždaug po 40 minučių, o dviratininkas — po 2 h 30 min. Taigi dviratininkas šią vietovę pravažiuos maždaug 1 h 50 min vėliau negu automobilis.

Pastaba. Remdamiesi grafiku dažniausiai gauname tik apytikslius duomenis. Tiksliai apskaičiuoti galima taikant formules $s_d = 20t$, $s_a = 80t$.

265. a) Dydžiai x ir y yra atvirkščiai proporcingi, jų proporcingumo koeficientas lygus 90.

b) Dydžiai x ir y nėra atvirkščiai proporcingi.

266. a)

x	3	6	7	14	30	60
y	14	7	6	3	1,4	0,7

$x \cdot y = 42$

b)

x	0,1	0,2	0,5	0,8	1	2	4
y	40	20	8	5	4	2	1

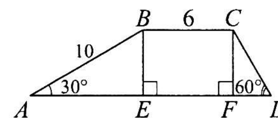
$x \cdot y = 4$

267. 3 h 12 min.

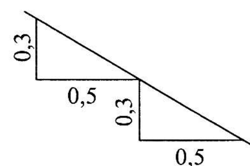
268. *Nurodymas.* Tašelių tūriai atvirkščiai proporcingi tankiams. Jeigu aliuminio tūris V_1, o geležies V_2, tai $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7,8}{2,7}$. Aliuminio tašelio tūris maždaug 2,9 karto didesnis už tokios pat masės geležinio tašelio tūrį.

Žr. pastabą prie 259 uždavinio.

269. a) *Nurodymas.* Iš bukojo trapecijos kampo viršūnės nubrėžkite trapecijos aukštinę. Gausite statųjį trikampį, kurio vienas statinis yra 4, o smailusis kampas lygus 30°. Kito statinio ilgį pažymėkite x. Tada įžambinės ilgis bus $2x$. Taikydami Pitagoro teoremą rasite įžambinės ilgį.



b) *Duota*: $ABCD$ — trapecija, $\angle A = 30°$, $\angle D = 60°$, $AB = 10$, $BC = 6$.
Apskaičiuoti: P_{ABCD}.
Sprendimas: $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 10 + 6 + CD + DA = 16 + CD + DA$. Nubrėžkime trapecijos aukštines BE ir CF. $\triangle AEB$ — status, $BE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (statinis, esantis prieš 30° kampą). Pagal Pitagoro teoremą gauname: $AE^2 = AB^2 - BE^2 = 10^2 - 5^2 = 75$, $AE = 5\sqrt{3}$. $\triangle CFD$ — status. $CF = BE = 5$. $\angle FCD = 30°$. Pažymėkime $FD = x$, tai $CD = 2x$. Pagal Pitagoro teoremą gauname: $(2x)^2 = 5^2 + x^2$, $x = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$; $2x = 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$. Tada $AD = AE + EF + FD = 5\sqrt{3} + 6 + \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} + 6$. $P_{ABCD} = 16 + \frac{10\sqrt{3}}{3} + \frac{20\sqrt{3}}{3} + 6 = 22 + 10\sqrt{3}$.
Atsakymas. a) $12 + 4\sqrt{3}$; b) $22 + 10\sqrt{3}$.



270. Lentos ilgis turi būti ne mažesnis už stačiojo trikampio, kurio statiniai yra 0,3 m ir 0,5 m, dvigubą įžambinės ilgį, t. y. ne mažesnis kaip $20\sqrt{34}$ cm $\approx 116{,}6$ cm.

271. Puoduko, kurio aukštis yra 10 cm, o skersmuo — 7 cm, tūris $V = (3{,}5)^2 \cdot 10 \cdot \pi = 122{,}5 \cdot \frac{22}{7} = 385\ (\text{cm}^3) = 0{,}385\ (\text{dm}^3) = 0{,}385\ (\ell)$.
Atsakymas. **A**.

272. *Nurodymas.* Darbininkų skaičius atvirkščiai proporcingas dienų skaičiui: $\frac{16}{x} = \frac{14}{21}$.
Atsakymas. Reikės 24 darbininkų.

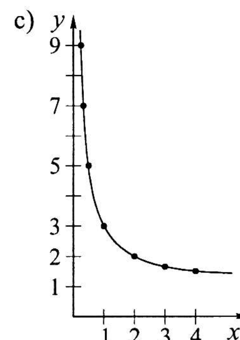
273. 10 h.

274. a) $y = \frac{2}{x} + 1$.

b)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	9	7	5	3	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$

c)



d) Ši priklausomybė nėra atvirkštinis proporcingumas, nes jų atitinkamų reikšmių sandaugos nėra lygios.

275. a) 1)

x	1	2	4	8	16
y	4	8	16	32	64

2)

x	3	6	12	18	36
y	15	30	60	90	180

b) 1)

x	1	2	4	8	16
y	64	32	16	8	4

2)

x	3	6	12	18	36
y	60	30	15	10	5

276. a)

x	3	6	12	24	48
y	2	4	8	16	32

b)

x	3	6	12	24	48
y	32	16	8	4	2

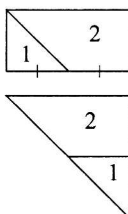
c)

x	24	54	15	81	36
y	8	18	5	27	12

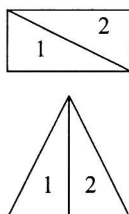
d)

x	27	54	12	81	36
y	12	6	27	4	9

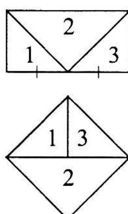
277. a)



b)



c)

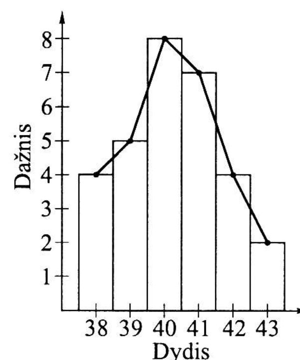


278. a) $(a-2)^2 - a(a-4) = a^2 - 4a + 4 - a^2 + 4a = 4 > 0$, tai $(a-2)^2 > a(a-4)$;
b) $(a-3)(a+2) - (a-0{,}5)^2 = a^2 - a - 6 - a^2 + a - 0{,}25 = -6{,}25 < 0$, tai $(a-3)(a+2) < (a-0{,}5)^2$.

279. a) Sakykime, kad didesnysis skaičius yra m. Tada mažesnysis bus $0{,}8m$. Sudarome lygtį: $m - 0{,}8m = 172$, $m = 860$; $0{,}8m = 0{,}8 \cdot 860 = 688$. $860 - 688 = 172$.
b) Sakykime, kad mažesnysis skaičius yra k. Tada didesnysis bus $1{,}5k$. Sudarome lygtį: $1{,}5k + k = 172$, $k = 68{,}8$; $1{,}5k = 1{,}5 \cdot 68{,}8 = 103{,}2$. $103{,}2 + 68{,}8 = 172$.

280. a) 38, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 43, 43.

Dydis	38	39	40	41	42	43
Dažnis	4	5	8	7	4	2



b) Imties plotis yra $43 - 38 = 5$. Didžiausia imties reikšmė yra 43, o mažiausia — 38.
d) Imties vidurkis — $\frac{38\cdot4+39\cdot5+40\cdot8+41\cdot7+42\cdot4+43\cdot2}{4+5+8+7+4+2} \approx 38$, mediana — $\frac{40+40}{2} = 40$.

281. a) 0; 1; 2; 3; b) 4.

282. a) DBD(85; 51) = 17; b) 85 : 17 = 5 (berniukai), 51 : 17 = 3 (mergaitės).

283. $500\,\text{m} + 500\,\text{dm} + 500\,\text{cm} + 500\,\text{mm} = (500 + 50 + 5 + 0{,}5)\,\text{m} = 555{,}5\,\text{m}$. Kadangi kiškio šuolis yra 1,5 m, tai 555,5 m atstumui nušuoliuoti kiškis turės atlikti $\frac{555{,}5}{1{,}5} = 370{,}(3)$ šuolio, t. y. 371 šuolį.
Atsakymas. **D.**

9.3. Figūrų didinimas ir mažinimas

Skyrelyje supažindinama su panašiomis figūromis ir jų savybėmis. Galima sakyti, kad tai įvadas į panašumą (panašumas bus nagrinėjamas 9 klasėje). Todėl čia panašios figūros nėra griežtai apibrėžiamos, o tik „buitiškai“ apibūdinamos.

Svarbiausia, kad mokiniai panašumą suvoktų kaip didinimą ar mažinimą. Taip pat svarbu, kad mokiniai žinotų, jog didinant ar mažinant:

- kampų didumai nepasikeičia;
- atstumai (kraštinių, įstrižainių, aukštinių, spindulių ir pan. ilgiai, perimetrai) padidėja ar sumažėja tiek pat kartų;
- plotai padidėja ar sumažėja k^2 kartų (k — panašumo koeficientas);
- tūriai padidėja ar sumažėja k^3 kartų.

Pastaba. Panašių figūrų tūrių santykiai teorinėje dalyje nenagrinėjami.

Pakartoti:
kokios figūros vadinamos lygiomis;
mastelį;
trikampio ir stačiakampio perimetro ir ploto radimą;
apskritimo lanko ilgio ir skritulio ploto formules.

Išmokti:
kokios figūros vadinamos panašiomis;
kas yra panašumo koeficientas;
teiginius, kurie yra teisingi panašioms figūroms, ir pritaikyti juos sprendžiant uždavinius.

Šiame skyrelyje:

1. Brėžinyje pavaizduoti trikampis ir jo du kartus padidintas vaizdas bei stačiakampis ir jo du kartus sumažintas vaizdas (žiūrint pro lupą). Paaiškinta, kad šitaip gautas figūras vadinsime panašiomis.
   Ypatingą dėmesį reikia atkreipti į tai, kad duotósios figūros ir figūros, gautós ją padidinus (sumažinus), kraštinės yra proporcingos (atitinkamų kraštinių santykiai lygūs), o kampai lygūs.
   Pastabos. 1. Kraštinių proporcingumo koeficientas vadinamas figūrų panašumo koeficientu.
   2. Atkreipkite mokinių dėmesį į ant lupos kotelio užrašytą *daugiklį*. Didinimo atveju daugiklis (didinimo koeficientas) didesnis už 1, mažinimo — mažesnis už 1. Čia reikėtų, ypač su silpnesniais mokiniais, pasiaiškinti, kad mažinimo atveju (kaip ir didinimo) *dauginame*. Svarbu, kad mokiniai suprastų, jog skaičių daugindami iš mažesnio už vienetą daugiklio gauname skaičių, mažesnį, negu turėjome.
2. Realiame gyvenime didinimas ar mažinimas taikomas braižant planus, darant maketus, žemėlapius ir pan. Tokiais atvejais nurodomas mastelis. Mokiniai turi mokėti teisingai paaiškinti užrašytą mastelį. Pavyzdžiui, žemėlapio mastelis 1 : 5 000 000 reiškia, kad:

- 1 cm žemėlapyje atitinka 5 000 000 cm vietovėje;
- realūs atstumai yra 5 000 000 kartų didesni, negu pavaizduota;
- ant lupos būtų parašyta $\times\frac{1}{5\,000\,000}$.

3. Pateikta užduotis, kurią atlikus lengviau bus suvokiami panašioms figūroms teisingi teiginiai:

- kraštinių santykiai lygūs. Tas santykis vadinamas panašumo koeficientu ir paprastai žymimas raide k;
- perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui (k);
- plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui (k^2);
- kai figūra F_2 gauta iš figūros F_1 ją didinant, tai panašumo koeficientas $k > 1$;
- kai figūra F_2 gauta iš figūros F_1 ją mažinant, tai panašumo koeficientas $k < 1$.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 284–296 uždaviniai, kiti — kartojimo. Pravartu prisiminti trikampio nelygybę (297), stačiojo trikampio savybes (298), atstumo tarp dviejų taškų formulę (299), lygiakraščio trikampio savybes bei Pitagoro teoremą (300), nelygybių sistemų sudarymą ir sprendimą (301, 303), kvadratų skirtumo formulę (302), reiškinių palyginimą nustatant jų skirtumo ženklą (304), baigčių, palankių įvykiui, sąvoką (305), tirpalo koncentraciją (306), laipsnių savybes (307), reiškinio su kvadratinėmis šaknimis reikšmės (308) ir MBK (309) radimą, lygties sudarymą ir sprendimą (310).

284. $4\,\text{m}^2$.

285. C.

286. a) $k = \frac{1}{2500}$; b) 93,75 a.

287. a) $1{,}3125\,\text{dm}^2$; b) $11{,}8125\,\text{dm}^2$.

288. a) $C = 8\pi$ cm; $S = 16\pi\,\text{cm}^2$; b) 3 m ir 4 m.

289. a) $81\,\text{cm}^2$; b) $2\,\text{cm}^2$.

290. a) Nors lygiagretainio $ABCD$ atitinkamos kraštinės yra 2,5 karto ilgesnės už lygiagretainio $A_1B_1C_1D_1$ kraštines, tačiau negalima sakyti, kad lygiagretainis $A_1B_1C_1D_1$ gautas iš lygiagretainio $ABCD$ jį sumažinus. Taip sakyti galima tik tada, kai šių lygiagretainių atitinkami kampai yra lygūs.

b) Ne, nes ne visos trikampio ABC kraštinės sumažintos vienodu santykiu.

291. $k = \sqrt{\frac{50}{8}} = 2{,}5$.

292. 1 : 600.

293. 1) $V = abc$;

2) $V_1 = k^3abc$;

3) $\frac{V_1}{V} = k^3$.

Padarykite išvadą, kad panašių stačiakampių gretasienių tūrių santykis lygus panašumo koeficiento kubui.

294. Pradinio kubo kraštinė lygi 1 m, sumažinto — 1 m : 20 = 5 cm. Gauto kubo tūris $5^3 = 125\,(\text{cm}^3)$. $1\,\text{m}^3 = 1\,000\,000\,\text{cm}^3$. Sumažinus kubo kraštinės ilgį 20 kartų gauto kubo tūris bus $\frac{1\,000\,000}{20^3} = 125\,(\text{cm}^3)$.

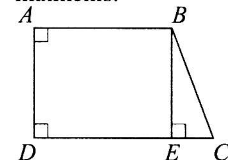
Galima pasinaudoti 293 uždavinio rezultatu.

295. $k^3 = \frac{128}{16} = 8$, tai $k = 2$.
Uždavinį galima išspręsti netaikant panašių gretasienių tūrių santykio savybės. Pažymėkime pradinio stačiakampio gretasienio kraštinę x, tada jo tūris $x^3 = 128$, o sumažinto stačiakampio gretasienio kraštinė bus $\frac{x}{k}$, o tūris $\left(\frac{x}{k}\right)^3 = 16$. Iš čia $\frac{x^3}{k^3} = 16$, $x^3 = 16 \cdot k^3$ ir $16 \cdot k^3 = 128$, $k^3 = 8$, $k = 2$.
Abiejų gretasienių kraštinių ilgius galima rasti ir tiesiog traukiant kubinę šaknį iš tūrių: $a = \sqrt[3]{128}$, $a_1 = \sqrt[3]{16}$. Po to ilgesniąją kraštinę padaliję iš trumpesniosios gausime k: $\frac{a}{a_1} = \frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\frac{128}{16}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

296. 8000.

Pastebėkite, kad dėžės matmenys yra 20 kartų didesni už degtukų dėžutės matmenis.

297. *Nurodymas*. Prisiminkite trikampio nelygybę.
Nubrėžkime $BE \perp DC$. Pastebėkime, kad $BE = AD$, $DC = DE + EC$, $AB = DE$. Todėl belieka nustatyti, kas daugiau: $BE + EC$ ar BC. Žinoma, kad trikampio kraštinė yra trumpesnė už kitų dviejų kraštinių sumą, todėl $BE + EC > BC$, o tuo pačiu $AD + DC > AB + BC$.



298. a) $x = 6$, $z = y = 6\sqrt{3}$, $u = 6\sqrt{6}$; b) $x = z = 6$, $y = 2\sqrt{3}$, $u = 4\sqrt{3}$.

299. a) $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = 5$; $BC = \sqrt{(7-5)^2 + (-1-7)^2} = 2\sqrt{17}$;
$AC = \sqrt{(7-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{41}$.
$AB^2 = 5^2 = 25$; $BC^2 = (2\sqrt{17})^2 = 68$; $AC^2 = (\sqrt{41})^2 = 41$.
Kadangi $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, tai $\triangle ABC$ nėra status.

b) $\triangle ABC$ yra status; c) $\triangle ABC$ yra status.

300. Galima spręsti taip: OB — lygiakraščio trikampio ABC aukštinė; $OB = 6$. OC — stačiojo trikampio BOC statinis, esantis prieš 30° kampą. Jį pažymėkime x. Tada $BC = 2x$. Taikydami Pitagoro teoremą gauname: $6^2 = (2x)^2 - x^2$, $x = 2\sqrt{3}$. Vadinasi, taško C koordinatės yra $(2\sqrt{3}; 0)$, o taško A koordinatės — $(-2\sqrt{3}; 0)$.
Atsakymas. $A(-2\sqrt{3}; 0)$, $C(2\sqrt{3}; 0)$.

301. a) Sakykime, kad šoninė kraštinė yra x cm. Sudarome nelygybių sistemą: $\begin{cases} 2x + 28 < 80, \\ 2x > 28; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 26, \\ x > 14. \end{cases}$ Taigi šoninė kraštinė gali būti ilgesnė už 14 cm ir trumpesnė už 26 cm.

b) Sakykime, kad pagrindo ilgis yra y cm. Sudarome nelygybių sistemą: $\begin{cases} 2 \cdot 48 + y < 150, \\ y > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y < 54, \\ y > 0. \end{cases}$ Taigi pagrindas turi būti trumpesnis už 54 cm.

302. a) $\frac{17{,}6^2 - 2{,}4^2}{7{,}6} = \frac{(17{,}6-2{,}4)(17{,}6+2{,}4)}{7{,}6} = \frac{15{,}2 \cdot 20}{7{,}6} = 40$;

b) $\frac{38^2 - 3^2}{55{,}5^2 - 14{,}5^2} = \frac{(38-3)(38+3)}{(55{,}5-14{,}5)(55{,}5+14{,}5)} = \frac{35 \cdot 41}{41 \cdot 70} = \frac{1}{2}$.

303. a) $(6; +\infty)$; b) $(-5; 3)$.

304. a) $(y+5)(y-7) - (y+4)(y-6) = y^2 - 2y - 35 - y^2 + 2y + 24 = -11 < 0$, tai $(y+5)(y-7) < (y+4)(y-6)$;

b) $(y+7)(y-2) - (y+11)(y-6) = y^2 + 5y - 14 - y^2 - 5y + 66 = 52 > 0$, tai $(y+7)(y-2) > (y+11)(y-6)$.

305. a) $hhs, hsh, shh, hss, shs, ssh, sss$; b) hhh.

306. 50 g + 750 g = 800 g; 800 g tirpalo yra 50 g druskos, tai druska sudaro $\frac{50}{800}$ tirpalo, t. y. $\frac{50 \cdot 8}{100} = \frac{6,25}{100}$ tirpalo. Vadinasi, tirpalo koncentracija yra 62,5 ‰.
Tai sudaro 6,25%.
Atsakymas. **C**.

307. a) 64; b) 3.

308. a) $1 - 2\sqrt{2\frac{7}{9}} = 1 - 2\sqrt{\frac{25}{9}} = 1 - 2 \cdot \frac{5}{3} = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$;
b) $0,5\sqrt{0,04} + \frac{1}{6}\sqrt{144} = 0,5 \cdot 0,2 + \frac{1}{6} \cdot 12 = 0,1 + 2 = 2,1$.

309. a) MBK(4; 5) = 20; b) MBK(4; 6) = 12.

310. Sakykime, kad tas skaičius yra x. Sudarome lygtį: $x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = 10$, $x = 9$.

10. MATAVIMAI IR PAKLAIDOS

Gyvenime dažnai susiduriame su skaičiais, kurie yra tik apytikslės tam tikrų dydžių reikšmės, o tikslios reikšmės nėra žinomos. Pavyzdžiui, negalima visiškai tiksliai pasakyti, kiek Žemėje yra gyventojų, koks atstumas nuo Kauno iki Vilniaus, koks yra mokyklinės lentos plotas ir pan. Todėl reikia mokėti:

1) pateikti apytikslius duomenis (suprasti pateiktus);
2) įvertinti apytikslių duomenų tikslumą;
3) atlikti veiksmus su apytiksliais skaičiais ir įvertinti gautų rezultatų tikslumą.

Šiame skyriuje nagrinėjame tik pirmuosius du iš aukščiau išvardytų punktų. Kaip galima pateikti apytikslius duomenis, aiškinama 1 ir 4 skyreliuose. Apie apytikslių duomenų tikslumą kalbama 2–4 skyreliuose. 2 ir 3 skyreliuose nagrinėjamos apytikslės reikšmės absoliučioji ir santykinė paklaidos, kai žinoma ir tiksli reikšmė. Kai žinoma dydžio reikšmė, gauta matuojant kokiu nors prietaisu, tai žinant prietaiso tikslumą taip pat galima įvertinti tos reikšmės paklaidas — apie tai kalbama 4 skyrelyje. 5 skyrelis su apytiksliais dydžiais ir paklaidomis neturi nieko bendra, — jame mokoma vienus matavimo vienetus versti kitais.

Pastabos. 1. Veiksmų su apytiksliais skaičiais pagrindinėje mokykloje nebus mokoma.
2. Paprastai užduočių su matavimais ir paklaidomis egzaminuose nebūna, bet sugebėti įvertinti rezultatą apytiksliai ir jausti paklaidą būna naudinga sprendžiant įvairius uždavinius.

10.1. Apytikslės dydžių reikšmės

Šiame skyrelyje mokoma apytiksliai įvertinti nežinomą dydžio reikšmę, t. y. nustatyti, tarp kokių skaičių (kokiame intervale) yra tiksli reikšmė. Mokėti apytiksliai įvertinti rezultatą yra labai svarbu tiek sprendžiant įvairius matematinius uždavinius, tiek realiame gyvenime. Reikia pratinti mokinius skaičiuoti apytiksliai. Taip pat labai svarbu mokėti teisingai interpretuoti apytikslius duomenis, t. y. žinant apytikslę dydžio reikšmę nustatyti, tarp kokių reikšmių yra tiksli to dydžio reikšmė.

Praktikoje apytikslės reikšmės paprastai nurodomos trejopai:

1) suapvalinus tikslią reikšmę iki kurio nors skyriaus;
2) nurodant apytikslę reikšmę ir galimą didžiausią paklaidą (tikslumą);
3) apytikslę reikšmę užrašant tiksliaisiais (reikšminiais) skaitmenimis.

Iki šiol mokiniai yra susipažinę tik su skaičių apvalinimu.

Pakartoti skaičių apvalinimą iki nurodyto skyriaus.

Išmokti:
sąvokas: *reikšmė su trūkumu* ir *reikšmė su pertekliumi*; nustatyti, tarp kokių skaičių yra tikslus skaičius, jei skaičius užrašytas: *suapvalinus* tikslią reikšmę iki nurodyto skyriaus; nurodant apytikslės reikšmės *tikslumą; tiksliaisiais skaitmenimis.*

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiu iš realaus gyvenimo įvedamos reikšmės su trūkumu ir reikšmės su pertekliumi sąvokos. Mokoma skaičiuoti apytiksliai.
2. Išnagrinėti du pavyzdžiai, kai matavimo rezultatas užrašomas tam tikru tikslumu ir kai skaičius užrašomas tiksliaisiais skaitmenimis. Abiem atvejais nustatoma, tarp kokių skaičių yra tikslioji reikšmė.

Pastaba. Kartais vietoje termino „tiksliaisiais skaitmenimis“ sakoma „reikšminiais skaitmenimis“. Reikšminiais (tiksliaisiais) skaitmenimis vadinami visi parašyto skaičiaus skaitmenys, išskyrus nulius, esančius prieš pirmą nelygų nuliui skaitmenį. Pavyzdžiui, skaičiaus $x \approx 4{,}5$ abu skaitmenys yra reikšminiai; skaičiaus $y \approx 4{,}50$ visi trys skaitmenys yra reikšminiai; skaičiaus $z \approx 0{,}045$ du skaitmenys (4 ir 5) yra reikšminiai.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Šiai temai skirti 311–314 pratimai. Prie teminių galima priskirti ir 315–319 pratimus, nors čia kartu reikia prisiminti apskritimo ilgio formulę (315), nelygybių savybes bei kvadrato ir lygiakraščio trikampio perimetro radimą (316–319). Pravartu pakartoti ir skaitinio reiškinio reikšmės (319, 323) bei dviejų skaičių bendro kartotinio (321) radimą, figūrų (kvadrato, stačiakampio, lygiagretainio, skritulio) ploto skaičiavimą (320), įvykiui palankios baigties sąvoką (322).

Uždavinyne šiai temai uždavinių nepateikta.

311. Kostas, matyt, skaičiavo „su pertekliumi“, t. y. tarė, kad batonas kainuoja 1 Lt, pienas — 2 Lt, sūris — 8 Lt, sausainiai — 3 Lt, kiaušiniai — 4 Lt, varškė — 2 Lt, mėsa — 20 Lt. Tokias kainas nesunku sudėti ir mintinai: $1+2+8+3+4+$ $+2+20=40$ (Lt). Vadinasi, mamai tikrai liks daugiau kaip $80-40=40$ (Lt).

Kad pardavėjai „neapsiriktų“, galite patarti mokiniams naudotis tokiu kainų įvertinimo būdu.

312. Mažiausiai gali būti $250-5=245$ (g), o daugiausiai — $250+5=255$ (g).

313. Moksleivių skaičių pažymėkime M, o studentų — S.
a) $566{,}3 \leqslant M \leqslant 566{,}5$; $67{,}0 \leqslant S \leqslant 67{,}2$ (1997/98 m.);
$580{,}7 \leqslant M \leqslant 580{,}9$; $74{,}4 \leqslant S \leqslant 74{,}6$ (1998/99 m.);
b) $566\,350 \leqslant M \leqslant 566\,449$; $67\,050 \leqslant S \leqslant 67\,149$ (1997/98 m.);
$580\,750 \leqslant M \leqslant 580\,849$; $74\,450 \leqslant S \leqslant 74\,549$ (1998/99 m.).

314. a) Vilniuje daugiausiai gali būti 578,5 tūkst. gyventojų, Kaune — 414,3 tūkst., Klaipėdoje — 202,6 tūkst.
b) Mažiausiai gali būti: Vilniuje — 578,3 tūkst., Kaune — 414,1 tūkst., Klaipėdoje — 202,4 tūkst., Šiauliuose — 146,7 tūkst., Panevėžyje — 133,6 tūkst.

315. Dviračio ratas apsisukęs 1 kartą nuvažiuoja kelią $C = 2\pi \cdot 0{,}5 = \pi$ (m). Apsisukęs 1000 kartų jis nuvažiuos $1000\pi \approx 1000 \cdot 3{,}14159... \approx 3141{,}6$ (m). Taigi dviratininkas bus nuvažiavęs 3141 m.

316. a) $18 < 5\sqrt{13} < 18{,}5$;
b) $13{,}6 < 10 + \sqrt{13} < 13{,}7$;
c) $4{,}6 < 12 - 2\sqrt{3} < 4{,}8$.

317. a) $13{,}2 < 3\sqrt{20} < 13{,}5$;
b) $10{,}5 < 15 - \sqrt{20} < 10{,}6$;
c) $6{,}5 < 20 - 3\sqrt{20} < 6{,}8$.

318. a) Kvadrato perimetras $P = 4a$. Kadangi $7\,\text{cm} < a < 7{,}5\,\text{cm}$, tai $28\,\text{cm} < 4a < 30\,\text{cm}$.
b) Lygiakraščio trikampio perimetras $P = 3a$, tai $a = \frac{P}{3}$.
Kadangi $22{,}5\,\text{cm} < P < 24\,\text{cm}$, tai $7{,}5\,\text{cm} < a < 8\,\text{cm}$.

319. a) $1{,}05^2 = (1 + 0{,}05)^2 \approx 1 + 2 \cdot 0{,}05 = 1{,}1$;
b) $1{,}005^2 = (1 + 0{,}005)^2 \approx 1 + 2 \cdot 0{,}005 = 1{,}01$;
c) $1{,}004^2 = (1 + 0{,}004)^2 \approx 1 + 2 \cdot 0{,}004 = 1{,}008$;
d) $0{,}99^2 = (1 - 0{,}01)^2 \approx 1 - 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}98$;
e) $0{,}98^2 = (1 - 0{,}02)^2 \approx 1 - 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}96$;
f) $0{,}97^2 = (1 - 0{,}03)^2 \approx 1 - 2 \cdot 0{,}03 = 0{,}94$.

320. Nesunku mintinai įvertinti kiekvienos figūros plotą; **A** — mažesnis kaip $10^2 = 100$; **B** — didesnis kaip $20 \times 5 = 100$; **C** — didesnis kaip $3 \cdot 6^2 = 108$; **D** — lygus $5 \cdot 20 = 100$.
Atsakymas. Didžiausias plotas figūros **C**, o mažiausias — **A**.

321. Reikia rasti skaičių 12 ir 8 bendrą kartotinį, kuris yra tarp skaičių 180 ir 200. 12 ir 8 mažiausias bendrasis kartotinis yra 24. Vadinasi, reikia rasti 24 kartotinį, kuris yra tarp 180 ir 200. Galima spėti, o galima spręsti nelygybę $180 < 24n < 200$, $45 < 6n < 50$. Akivaizdu, kad $n = 8$. Vadinasi, ieškomas skaičius yra $8 \cdot 24 = 192$.
Galima spręsti taip:
Padalykime visus skaičius iš 4. Tada belieka rasti 3 ir 2 bendrą kartotinį tarp 45 ir 50. Iš 6 dalijasi tik 48. Randame ieškomą skaičių: $4 \cdot 48 = 192$.
Galima spręsti ir taip:
$180 : 12 = 15$. Vadinasi, 12 kartotiniai tarp 180 ir 200 yra 180, 192. Dabar: $180 : 8 = 22{,}5$, todėl mažiausias 8 kartotinis didesnis už 180 yra $23 \cdot 8 = 184$. Kiti kartotiniai yra 192, 200.
Atsakymas. 192.

322. a) hh, hs, sh;
b) hs, sh, ss.

323. a) $\frac{600}{5{,}94573} \cdot 4{,}3208 \approx 436{,}02$ (Lt);
b) $\frac{600}{1936{,}27} \cdot 4{,}3208 \approx 1{,}34$ (Lt).

10.2. Absoliučioji paklaida

Šiame ir kitame skyreliuose mokoma įvertinti apytikslės reikšmės tikslumą, kai žinoma ir tiksli dydžio reikšmė. Šiame skyrelyje mokoma nustatyti, *kiek* apytikslė reikšmė skiriasi nuo tikslios, t. y. apskaičiuoti apytikslės reikšmės absoliučiąją paklaidą. Absoliučioji paklaida leidžia palyginti *to paties dydžio* apytikslių reikšmių tikslumą — kuo absoliučioji paklaida yra mažesnė, tuo apytikslė reikšmė yra tikslesnė. Šis skyrelis turėtų būti lengvai suprantamas visiems mokiniams.

Pakartoti skaičiaus modulį.

Išmokti apskaičiuoti dydžio apytikslės reikšmės absoliučiąją paklaidą.

Šiame skyrelyje:

1. Išnagrinėtas pavyzdys dydžio apytikslės reikšmės absoliučiajai paklaidai rasti.
2. Pateiktas absoliučiosios paklaidos apibrėžimas:

Dydžio apytikslės ir tikslios reikšmių skirtumo modulis vadinamas absoliučiąja paklaida.

3. Absoliučioji paklaida užrašoma taip: $|x - a|$; čia x — dydžio apytikslė reikšmė, a — dydžio tiksli reikšmė. Kuo mažesnė absoliučioji paklaida, tuo apytikslė reikšmė yra artimesnė tiksliajai reikšmei.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Absoliučiajai paklaidai skaičiuoti skirti 324–330 uždaviniai. Likę uždaviniai skirti kartojimui: nelygybių (333), lygčių (334) sprendimas, procentų skaičiavimas (335), bendro kartotinio radimas (332). 6, 7

324. a) Kai $a = 2{,}5$; $x = 2{,}4$, tai $|x - a| = |2{,}4 - 2{,}5| = 0{,}1$; b) kai $a = 30$; $x = 29{,}6$, tai $|x - a| = |29{,}6 - 30| = 0{,}4$; c) kai $a = 22$; $x = 23$, tai $|x - a| = |23 - 22| = 1$; d) kai $a = 19{,}5$; $x = 19{,}51$, tai $|x - a| = |19{,}51 - 19{,}5| = 0{,}01$; e) kai $a = \frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{2}$, tai $|x - a| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{3}| = \frac{1}{6}$; f) kai $a = \frac{2}{5}$; $x = \frac{1}{4}$, tai $|x - a| = |\frac{1}{4} - \frac{2}{5}| = \frac{3}{20}$; g) kai $a = \frac{2}{11}$; $x = 0{,}18$, tai $|x - a| = |0{,}18 - \frac{2}{11}| = \frac{1}{550}$; h) kai $a = \frac{1}{3}$; $x = 0{,}3$, tai $|x - a| = |0{,}3 - \frac{1}{3}| = \frac{1}{30}$.

325. a) 0,0359; b) 0,0041; c) 0,0001; d) $\frac{1}{14}$; e) $\frac{1}{300}$; f) $\frac{1}{350}$.

326. a) $15{,}27 \approx 15{,}3$; $|15{,}3 - 15{,}27| = 0{,}03$; b) $2{,}19 \approx 2{,}2$; $|2{,}2 - 2{,}19| = 0{,}01$; c) $6{,}23 \approx 6{,}2$; $|6{,}2 - 6{,}23| = 0{,}03$; d) $7{,}25 \approx 7{,}3$; $|7{,}3 - 7{,}25| = 0{,}05$.

327. a) $2{,}357 \approx 2{,}4$; $|2{,}4 - 2{,}357| = 0{,}043$; $2{,}357 \approx 2{,}36$; $|2{,}36 - 2{,}357| = 0{,}003$; b) $15{,}622 \approx 15{,}6$; $|15{,}6 - 15{,}622| = 0{,}022$; $15{,}622 \approx 15{,}62$; $|15{,}62 - 15{,}622| = 0{,}002$; c) $100{,}011 \approx 100{,}0$; $|100{,}0 - 100{,}011| = 0{,}011$; $100{,}011 \approx 100{,}01$; $|100{,}01 - 100{,}011| = 0{,}001$. Paklaida mažesnė apvalinant iki šimtųjų.

328. a) Greičiau plotą turėjo apskaičiuoti Simas; b) tiksliau apskaičiavo Rimas.

$29{,}52 \cdot 29{,}66 = 875{,}5632$.

329. 0,02; 0,08; 0,02; 0,01.

330. a) $|x - 2{,}7| < 0{,}1$, tai $2{,}6 < x < 2{,}8$; b) $|x - 3{,}2| < 0{,}1$, tai $3{,}1 < x < 3{,}3$; c) $|x - 30| < 0{,}1$, tai $29{,}9 < x < 30{,}1$.

Šį uždavinį reikia spręsti mintinai.

331. a) Sakykime, kad stačiakampio kraštinės yra a ir b, $a \leqslant b$. $P_{st} = 2(a + b) = 20$, tai $a + b = 10$, $b = 10 - a$. Kadangi $a \leqslant b$, tai $0 < a \leqslant 5$. Reikia nustatyti a reikšmes, su kuriomis $a(10 - a) \geqslant 21$. Bandydami randame, kad $a \in [3; 5]$.
b) Bandydami nustatome, kad didžiausio ploto stačiakampį gausime, kai $a = 5$. Tada jo plotas $S = 25\,\text{m}^2$.
c) Atkirpus 4 m vielos liks $20 - 4 = 16$ (m). Taigi dviejų gretimų kraštinių suma turi būti lygi 8, o sandauga didesnė už 15. Tada $a \leqslant 4$, o plotas $a(8 - a) > 15$. Bandydami nustatome, kad stačiakampį išlankstyti galima, o jo trumpesnioji kraštinė turi būti iš intervalo (3; 4].
Atsakymas. a) Trumpesniosios stačiakampio kraštinės ilgis gali būti ne mažesnis už 3 m ir ne didesnis už 5 m. b) $25\,\text{m}^2$. c) Galima.

Kvadratinės nelygybės bus nagrinėjamos 10 klasėje, bet su stipresniais mokiniais galima išspręsti gautąją nelygybę: $a(10 - a) \geqslant 21$, $a^2 - 10a + 21 \leqslant 0$, $(a - 5)^2 \leqslant 4$, $(5 - a)^2 \leqslant 2^2$. Bet $5 - a \geqslant 0$, todėl $5 - a \leqslant 2$, t. y. $a \geqslant 3$.

332. Reikia rasti skaičių 2, 3, 5, 10 ir 15 bendrą kartotinį, kuris būtų mažesnis už 50. Toks skaičius yra 30.

Pradėkite nuo 15 kartotinių: 15, 30, 45.

333. a) Sprendžiame nelygybę: $-2(8y - 1) > 7 - 3y$, $y < -\frac{5}{13}$.
b) Sprendžiame nelygybę: $5y + 1 < -3(2 + 3y)$, $y < -\frac{1}{2}$.

334. a) Sprendžiame lygtį: $(x + 4)(3 - x) + x(x + 6) = 7$, $x = -1$.
b) Sprendžiame lygtį: $x(5 - x) + (x - 2)(x + 2) = 1$, $x = 1$.

335. a) Lydinyje yra $\frac{8}{8+32} \cdot 100\% = 20\%$ vario.
b) Vario masė sudaro $\frac{8}{32} \cdot 100\% = 25\%$ alavo masės.

10.3. Santykinė paklaida

Kai žinome *skirtingų dydžių* apytiksles reikšmes, tai jų tikslumui palyginti absoliučiosios paklaidos negelbsti. Pavyzdžiui, nesunku suprasti, kad apsirikti kilogramu vertinant draugo svorį yra daug blogiau negu tiek pat apsirikti vertinant dramblio svorį. Skirtingų dydžių apytikslių reikšmių tikslumą palyginti padeda tų apytikslių reikšmių santykinės paklaidos. Santykinė paklaida parodo, kurią apytikslės reikšmės dalį sudaro absoliučioji paklaida. Suvokti santykinės paklaidos matematinę prasmę yra sunkiau negu absoliučiosios paklaidos, todėl dažnai tenka įdėti daugiau pastangų siekiant, kad mokiniai suvoktų jos esmę, o ne mechaniškai taikytų formulę.

Pakartoti:

absoliučiąją paklaidą;
procento apibrėžimą;
trupmenos reiškimą procentais.

Išmokti:

santykinės paklaidos prasmę;
apskaičiuoti dydžio apytikslės reikšmės santykinę paklaidą.

Šiame skyrelyje:

1. Išnagrinėtas pavyzdys dydžio apytikslės reikšmės santykinei paklaidai rasti ir pateiktas apibrėžimas:

   > *Dydžio apytikslės reikšmės santykine paklaida vadiname absoliučiosios paklaidos ir apytikslės reikšmės santykį.*

   Santykinė paklaida užrašoma taip: $\frac{|x-a|}{x}$; čia x — apytikslė dydžio reikšmė, a — tiksli dydžio reikšmė.

   Pastaba. Santykinę paklaidą apibrėžti galima ir kaip absoliučiosios paklaidos ir *tikslios* reikšmės santykį. Ypač tai patogu, kai yra žinoma tiksli reikšmė. Apskaičiuotos abiem būdais santykinės paklaidos beveik nesiskiria.

2. Paaiškinama, kad santykinė paklaida dažnai reiškiama procentais.

   Pastaba. Galima paaiškinti mokiniams, kad Valduko spėjimo santykinė paklaida $\frac{1}{10}$ parodo, kad jis apsiriko 1 žodžiu kas 10 žodžių, o Nijolytė apsiriko 1 žodžiu kas 50 žodžių — jos spėjimo santykinė paklaida $\frac{1}{50}$. Taigi spėjimo tikslumą (kokybę) geriau apibūdina santykinė paklaida.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Santykinei paklaidai skaičiuoti skirti 336–342 pratimai. Kartu pakartojamas skaičių apvalinimas bei absoliučiosios paklaidos radimas. Siūloma prisiminti nelygybių savybes bei kvadrato ir lygiakraščio trikampio perimetro skaičiavimą (343), lygčių sprendimą ir procentus (344, 345), nelygybių sprendimą (346), tekstinių (judėjimo) uždavinių sprendimą (347), skaitinio reiškinio reikšmės radimą skaičiuokliu (348).

8, 9

Prisiminkite pagrindinę trupmenos savybę.

336. a) $\frac{0,1}{2,4} = \frac{1}{24}$; b) $\frac{1}{74}$; c) $\frac{1}{23}$; d) $\frac{1}{1951}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{3}{5}$; g) $\frac{1}{99}$; h) $\frac{1}{9}$.

337. a) $|0,3 - \frac{1}{3}| = \frac{1}{30}$, $\frac{\frac{1}{30}}{0,3} = \frac{1}{9}$; $|1,3 - 1\frac{1}{3}| - \frac{1}{30}$, $\frac{\frac{1}{30}}{1,3} = \frac{1}{39}$;

b) $|0,6 - \frac{2}{3}| = \frac{1}{15}$, $\frac{\frac{1}{15}}{0,6} = \frac{1}{9}$; $|10,6 - 10\frac{2}{3}| = \frac{1}{15}$, $\frac{\frac{1}{15}}{10,6} = \frac{1}{159}$.

338. Petriuko padaryta santykinė paklaida lygi $\frac{|181-180|}{181} = \frac{1}{181}$ ($\approx 0,55\%$); Onutės padaryta santykinė paklaida lygi $\frac{|361-360|}{361} = \frac{1}{361}$ ($\approx 0,28\%$). Galima sakyti, kad kruopščiau matavo Onutė, nes $\frac{1}{361} < \frac{1}{181}$.

339. a) $18,25 \approx 18,3$; $\frac{|18,3-18,25|}{18,3} = \frac{5}{1830} = \frac{1}{366}$;

b) $14,061 \approx 14,1$; $\frac{|14,1-14,061|}{14,1} = \frac{39}{14\,100} = \frac{13}{4700}$;

c) $8,764 \approx 8,8$; $\frac{|18,8-8,764|}{8,8} = \frac{36}{8800} = \frac{9}{2200}$.

340. a) $8,69 \approx 9$; $\frac{|9-8,69|}{9} = \frac{31}{900} = 0,03(4)$ arba $3,(4)\%$;

b) $0,362 \approx 0,4$; $\frac{|0,4-0,362|}{0,4} = 0,095$ arba $9,5\%$;

c) $233 \approx 230$; $\frac{|230-233|}{230} = \frac{3}{230}$ arba $\approx 1,3\%$;

d) $0,195 \approx 0,20$; $\frac{|0,20-0,195|}{0,20} = 0,025$ arba $2,5\%$.

341. a) Skaičiai, kuriuos suapvalinę iki šimtų tūkstančių gauname 22 400 000 yra intervale [22 350 000; 22 450 000). Didžiausia absoliučioji paklaida gaunama apvalinant skaičių 22 350 000, t. y. $|22\,400\,000 - 22\,350\,000| = 50\,000$. Santykinė paklaida yra didžiausia, kai yra didžiausia absoliučioji paklaida, t. y. $\frac{50\,000}{22\,400\,000} = \frac{1}{448}$;

b) Jeigu skaičius 22 400 000 užrašytas su trimis tiksliaisiais skaitmenimis, tai tiksli reikšmė yra intervale (22 300 000; 22 500 000). Vadinasi, absoliučioji paklaida bus mažesnė už $|22\,400\,000 - 22\,500\,000| = 100\,000$, o santykinė — $\frac{100\,000}{22\,400\,000} = \frac{1}{224}$.

Punkto b) paklaidos galėjo būti beveik 2 kartus didesnės už punkto a).

342. Tai tas pats, kas $(20 \pm 2)\Omega$, nes 10% nuo 20 yra 2. Vadinasi, radijo detalės varža R yra didesnė už 18 ir mažesnė už 22: $18 < R < 22$.

343. a) Lygiakraščio trikampio perimetras $P = 3a$. Kadangi $8\,\text{cm} < a < 8{,}5\,\text{cm}$, tai $24\,\text{cm} < 3a < 25{,}5\,\text{cm}$.

b) Kvadrato perimetras $P = 4a$, tai $a = \frac{P}{4}$. Kadangi $10\,\text{cm} < P < 12\,\text{cm}$, tai $2{,}5\,\text{cm} < a < 3\,\text{cm}$.

344. Jeigu $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{x} = \frac{23}{12}$, tai $x = 4$.
Atsakymas. **C**.

345. a) Tarkim, kad antroji knyga kainavo x Lt. Tada pirmoji knyga kainavo $0{,}8x$ Lt. Sprendžiame lygtį: $x + 0{,}8x = 19{,}8$, $x = 11$; $0{,}8 \cdot 11 = 8{,}8\,(\text{Lt})$.

b) Tarkim, kad antroji knyga kainavo x Lt. Tada pirmoji knyga kainavo $1{,}2x$ Lt. Sprendžiame lygtį: $x + 1{,}2x = 19{,}8$, $x = 9$; $1{,}2 \cdot 9 = 10{,}8\,(\text{Lt})$.

Atsakymas. a) 8,8 Lt, 11 Lt; b) 10,8 Lt, 9 Lt.

346. a) Sprendžiame nelygybę: $100(x - 2) < 50(x - 2)$, $x < 2$.

b) Sprendžiame nelygybę: $2(x + 1) \geqslant 200(x + 1)$, $x \leqslant -1$.

347. Iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti, kad abu rokeriai atvyks tuo pačiu metu, bet taip nėra. Pažymėkime atstumą tarp Alytaus ir Lazdijų s. Pusė kelio bus $\frac{s}{2}$. Pirmasis rokeris kelionėje sugaišo $t_1 = \frac{s}{50}$ valandų, antrasis —

$$t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{60} + \frac{\frac{s}{2}}{40} = \frac{s}{48}\ \text{(valandų)}.$$

Kadangi $\frac{s}{50} < \frac{s}{48}$, tai pirmasis rokeris į Lazdijus atvyko anksčiau.

348. a) $\frac{450}{40{,}3399} \cdot 4{,}3208 \approx 48{,}20\,(\text{Lt})$;

b) $\frac{450}{2{,}20371} \cdot 4{,}3208 \approx 882{,}31\,(\text{Lt})$;

c) $\frac{450}{6{,}55957} \cdot 4{,}3208 \approx 296{,}42\,(\text{Lt})$;

d) $\frac{450}{2{,}95583} \cdot 4{,}3208 \approx 994{,}14\,(\text{Lt})$.

Reikėtų pažymėti, kad valiutų kursai nėra pastovūs. Mokiniai galėtų pasidomėti, kokie šiuo metu valiutų kursai, ir nustatyti, pavyzdžiui, kada litus buvo naudingiau keisti į užsienio valiutą: tada, kai buvo rašoma knyga, ar dabar.

10.4. Matavimo tikslumas

Praktikoje dažnai susiduriama su įvairiais matavimais. Atstumas, greitis, masė, laikas matuojami tam skirtais matavimo prietaisais. Matuojant nustatyti tikslią dydžio reikšmę praktiškai yra neįmanoma. Net ir pačiais tiksliausiais matavimo prietaisais beveik visada gaunama tik apytikslė reikšmė. Matavimo rezultato tikslumas priklauso nuo matavimo prietaiso tikslumo. Todėl svarbu teisingai vertinti pateiktus matavimo rezultatus ir mokėti teisingai juos užrašyti. Paprastai matavimo rezultatai yra pateikiami nurodant matavimo tikslumą — apytiksle ar tikslia lygybe arba matavimo rezultatą nurodant tiksliaisiais (reikšminiais) skaitmenimis. Šiame skyrelyje matavimo rezultato užrašymas tiksliaisiais skaitmenimis nenagrinėjamas — tai buvo daroma 1 skyrelyje. Šio skyrelio medžiaga gali būti sunkiau suvokiama mokiniams negu praeitų skyrelių medžiaga, nes vertinant apytikslės reikšmės tikslumą tiksli reikšmė nėra žinoma.

Pakartoti absoliučiąją ir santykinę paklaidas.

Išmokti:

nurodyti matavimo prietaiso tikslumą (ir suprasti užrašytą);

užrašyti matavimo rezultatą;

paaiškinti ryšį tarp absoliučiosios paklaidos ir matavimo tikslumo;

paaiškinti ryšį tarp santykinės paklaidos ir matavimo tikslumo;

įvertinti matavimo (kai žinomas matavimo tikslumas) absoliučiąją ir santykinę paklaidas.

Šiame skyrelyje:

1. Pavyzdžiu paaiškinamas matavimo prietaiso tikslumas ir pateikiamas apibrėžimas:

> *Mažiausia matavimo prietaiso padalos vertė vadinama to prietaiso tikslumu.*

2. Paaiškinama, kaip užrašomas matavimo rezultatas nurodant matavimo prietaiso tikslumą. Absoliučioji matavimo paklaida laikoma mažesne už prietaiso tikslumą, o santykinė matavimo paklaida — mažesne už prietaiso tikslumo ir matavimo rezultato santykį.
3. Išnagrinėtas pavyzdys matavimo kokybei (tikslumui santykinės paklaidos prasme) nustatyti.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Matavimo tikslumui nustatyti skirti 349–357 pratimai. Šio skyriaus ankstesnė medžiaga kartojama 358–360 pratimuose. Be to, kartojimui skirti ir 361–364 pratimai. 3–5, 10

349. Medicininio termometro tikslumas yra 0,1 laipsnio; kambario termometro tikslumas yra 1 laipsnis. Temperatūra tiksliau matuojama medicininiu termometru.

350. Matuojant liniuote gautas rezultatas $b = 9$ mm; slankmačiu — $a = 9{,}8$ mm; mikrometru — $c = 9{,}78$ mm.
$a = (9{,}8 \pm 0{,}1)$ mm; $b = (9 \pm 1)$ mm; $c = (9{,}78 \pm 0{,}01)$ mm.

351. a) Matavimo skalės padalos vertė yra 1 mm.
b) Reikšmė su trūkumu lygi $270 - 1 = 269$ (mm);
su pertekliumi — $270 + 1 = 271$ (mm).
c) $h = 1$ mm.

352. Matavimo absoliučioji paklaida neviršija 0,5 cm. Matavimo santykinė paklaida yra mažesnė už $\frac{0{,}5}{2{,}27} = \frac{50}{227}$, t. y. $\approx 22{,}03\%$.

353. Dydžio l matavimo santykinė paklaida yra mažesnė už $\frac{0{,}5}{15{,}0} = \frac{1}{30}$, t. y. 3,(3)%; dydžio L matavimo santykinė paklaida yra mažesnė už $\frac{0{,}5}{140{,}0} = \frac{1}{280}$, t. y. $\approx 0{,}36\%$. Kadangi dydžio l matavimo santykinė paklaida didesnė, vadinasi tiksliau išmatuotas dydis L.

354. Geležinkelio vagono masės M svėrimo santykinė paklaida yra mažesnė už $\frac{0{,}5}{63} = \frac{1}{126}$, t. y. $\approx 0{,}79\%$. Vaistų dozės masės m svėrimo santykinė paklaida mažesnė už $\frac{0{,}01}{0{,}15} = \frac{1}{15}$, t. y. 6,(6)%. Taigi tiksliau pasvertas geležinkelio vagonas.

355. Stiklo storio b matavimo santykinė paklaida yra mažesnė už $\frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}$, t. y. 25%, o lentynos ilgio l matavimo santykinė paklaida yra mažesnė už $\frac{0{,}1}{100{,}0} = \frac{1}{1000}$, t. y. 0,1%. Taigi tiksliau išmatuotas lentynos ilgis.

356. Kruopų svėrimo santykinė paklaida yra mažesnė už $\frac{100}{25\,000} = \frac{1}{250}$, t. y. 0,4%, o miltų svėrimo santykinė paklaida yra mažesnė už $\frac{5}{1500} = \frac{1}{300}$, t. y. 0,(3)%. Taigi tiksliau pasverti miltai.

357. Mažiausiai Žemei gali būti 4400 mln. metų, o daugiausiai — 4500 mln. metų.

358. $5 < 5{,}6 < 6$; $14 < 14{,}76 < 15$; $103 < 103{,}23 < 104$.

359. a) $7{,}1 < x < 7{,}3$; b) $2{,}25 < x < 2{,}27$; c) $68 < x < 70$; d) $0{,}326 < x < 0{,}328$.

360. Santykinė paklaida mažesnė už:
a) $\frac{0{,}1}{5{,}5} = \frac{1}{55}$ arba 1,8(18)%; b) $\frac{0{,}1}{10{,}01} = \frac{10}{1001}$ arba $\approx 1\%$;
c) $\frac{0{,}01}{1{,}41} = \frac{1}{141}$ arba $\approx 0{,}71\%$; d) $\frac{0{,}01}{2{,}22} = \frac{1}{222}$ arba $\approx 0{,}45\%$.

361. Nagrinėjame du atvejus — kai mažesnis kampas yra prieš pagrindą ir kai jis yra prie pagrindo.
1 atvejis. Mažesnis kampas yra prieš pagrindą, ir jį pažymėkime x. Tada kampas prie pagrindo bus $x+30°$. Sprendžiame lygtį: $x + x + 30° + x + 30° = 180°$, $x = 40°$; $40° + 30° = 70°$. Taigi trikampio kampai yra 70°, 70° ir 40°.
2 atvejis. Mažesnis kampas yra prie pagrindo, ir jį pažymėkime x. Tada kampas prieš pagrindą bus $x + 30°$. Sprendžiame lygtį: $x + x + x + 30° = 180°$, $x = 50°$; $50° + 30° = 80°$. Taigi trikampio kampai yra 50°, 50° ir 80°.
Atsakymas. 70°, 70°, 40° arba 50°, 50°, 80°.

362. Rodyklė pasisuks 48° kampu.

363. Per dieną be reikalo dujos dega $12 \cdot 10 = 120\,(\text{s}) = 2\,(\text{min})$; per metus — $2 \cdot 365 = 730\,(\text{min})$, t. y. $\frac{730}{60} = 12\frac{1}{6}$ (h). Jei per 1 h sudega 700 dm^3 dujų, tai per $12\frac{1}{6}$ h jų sudegs $12\frac{1}{6} \cdot 700 = 8516{,}(6)\,\text{dm}^3$.

364. Jei iš vienos karvės per dieną primelžiama 15–20 kg pieno, tai iš 100 karvių primelžiama 1500–2000 kg pieno. Per 30 dienų iš 100 karvių bus primelžiama nuo $30 \cdot 1500 = 45\,000$ (kg) iki $30 \cdot 2000 = 60\,000$ (kg) pieno.
1 cnt = 100 kg, tai 45 000 kg = 450 cnt, o 60 000 kg = 600 cnt. Jei iš 1 cnt pieno gaunama 8–9 kg sūrio, tai iš 450 cnt pieno bus gaunama nuo $8 \cdot 450 = 3600$ (kg) iki $9 \cdot 450 = 4050$ (kg) sūrio, o iš 600 cnt pieno bus gaunama nuo $8 \cdot 600 = 4800$ (kg) iki $9 \cdot 600 = 5400$ (kg) sūrio. Taigi galima gauti nuo 3600 kg iki 5400 kg sūrio.

10.5. Matavimo vienetų sąryšiai

Praktikoje ir moksle dažnai naudojami ne visai įprasti matavimo vienetai, pavyzdžiui: megatona, dekagramas, mikrometras, hektolitras. Šiame skyrelyje aiškinama, kaip yra sudaromi matavimo vienetai, ką jie reiškia ir kaip vienus matavimo vienetus versti kitais. Šiame skyrelyje apsiribojama SI sistemos matavimo vienetais.

Pakartoti:

skaičiaus užrašymą standartine išraiška;
veiksmus su dešimties laipsniais.

Išmokti vienus matavimo vienetus versti kitais.

Šiame skyrelyje:

1. Lentelėje pateiktos kartotinių ir dalinių matavimo vienetų dalys, jų žymėjimas ir jas atitinkantys daugikliai.
2. Išnagrinėtas vienų matavimo vienetų vertimo kitais pavyzdys.
3. Klaustuku pažymėtą užduotį galima pasiūlyti mokiniams atlikti namuose.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai yra 365–371 pratimai. Juos spręsdami prisiminsite ir skaičiaus užrašymą standartine išraiška (368, 370), ir skaičių palyginimą (369), ir mastelį (371). Skaičiams apvalinti bei absoliučiajai ir santykinei paklaidai rasti skirti 372–374 pratimai. Be to, siūloma pakartoti kvadrato kraštinės radimą, kai žinomas plotas (375), simetriją tiesės atžvilgiu (377, 378). 381 — probleminis uždavinys. 1, 2

365. a) $3100 = 3{,}1 \cdot 10^3$; b) $5420 = 5{,}42 \cdot 10^3$; c) 62 tūkst. $= 6{,}2 \cdot 10^4$;
d) 43 mln. $= 4{,}3 \cdot 10^7$; e) $0{,}05 = 5 \cdot 10^{-2}$; f) $0{,}078 = 7{,}8 \cdot 10^{-2}$;
g) $0{,}00023 = 2{,}3 \cdot 10^{-4}$; h) $0{,}00006 = 6 \cdot 10^{-5}$; i) $20 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^6$;
j) $0{,}03 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^2$; k) $0{,}245 \cdot 10^{-4} = 2{,}45^{-5}$; l) $375 \cdot 10^{-3} = 3{,}75 \cdot 10^{-1}$.

366. a) $32\,000\,\text{t} = 32 \cdot 10^3\,\text{t} = 32\,\text{kt}$; $4050\,\text{t} = 4{,}050 \cdot 10^3\,\text{t} = 4{,}050\,\text{kt}$;
b) $300\,\ell = 3 \cdot 10^2\,\ell = 3\,\text{h}\ell$; $4200\,\ell = 42 \cdot 10^2\,\ell = 42\,\text{h}\ell$;
c) $0{,}002\,\text{s} = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{s} = 2\,\text{ms}$; $0{,}0015\,\text{s} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{s} = 1{,}5\,\text{ms}$;
d) $0{,}8\,\text{g} = 8 \cdot 10^{-1}\,\text{g} = 8\,\text{dg}$; $0{,}24\,\text{g} = 2{,}4 \cdot 10^{-1}\,\text{g} = 2{,}4\,\text{dg}$;
e) $0{,}000007\,\text{m} = 7 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 7\,\mu\text{m}$; $0{,}0000045\,\text{m} = 4{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 4{,}5\,\mu\text{m}$;
f) $0{,}001\,\text{g} = 1 \cdot 10^{-3}\,\text{g} = 1\,\text{mg}$; $0{,}0063\,\text{g} = 6{,}3 \cdot 10^{-3}\,\text{g} = 6{,}3\,\text{mg}$.

367. a) $2\,000\,000\,\text{t} = 2 \cdot 10^6\,\text{t} = 2\,\text{Mt}$; $2\,500\,000\,\text{t} = 2{,}5 \cdot 10^6\,\text{t} = 2{,}5\,\text{Mt}$;
$2\,050\,000\,\text{t} = 2{,}05 \cdot 10^6\,\text{t} = 2{,}05\,\text{Mt}$;
b) $460\,\ell = 4{,}6 \cdot 10^2\,\ell = 4{,}6 \cdot 10^1\,\text{da}\ell$; $4000\,\ell = 4 \cdot 10^3\,\ell = 4 \cdot 10^2\,\text{da}\ell$;
$4\,\ell = 0{,}4 \cdot 10^1\,\ell = 0{,}4\,\text{da}\ell$;
c) $0{,}00000007\,\text{m} = 7 \cdot 10^{-8}\,\text{m} = 7 \cdot 10^{-2}\,\mu\text{m}$;
$0{,}00000027\,\text{m} = 2{,}7 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 2{,}7 \cdot 10^{-1}\,\mu\text{m}$;
$0{,}00000207\,\text{m} = 2{,}07 \cdot 10^{-6}\,\text{m} = 2{,}07\,\mu\text{m}$.

368. Jei kasmet į pasaulio vandenyną patenka $\approx 15\,\text{Mt}$ naftos produktų, tai per paskutinįjį dešimtmetį jų pateko $\approx 15 \cdot 10 = 150\,\text{Mt} = 150 \cdot 10^6\,\text{t} = 1{,}5 \cdot 10^8\,\text{t} =$
$= 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\text{kg}$.

369. a) $7{,}3 \cdot 10^4\,\text{m}$; b) $1{,}2 \cdot 10^6\,\text{t}$; c) $0{,}0003\,\text{g}$; d) $7000\,\ell$.

370. 1 a.v. $= 150$ mln. km $= 1{,}5 \cdot 10^8$ km, tai $207\,000$ a.v. $= 2{,}07 \cdot 10^5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8$ km $=$
$= 3{,}105 \cdot 10^{13}$ km.

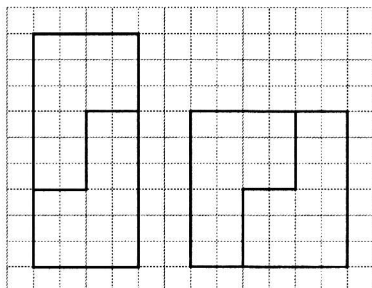
371. a) Žemėlapyje, kurio mastelis $1 : 20\,000\,000$, 1 cm atitinka 200 km.
b) Didžiosios kinų sienos ilgis tikrovėje yra $20 \cdot 200 = 4000$ (km) $= 4 \cdot 10^6$ (m).
c) Kelio Vilnius–Kaunas–Klaipėda ilgis žemėlapyje bus $\frac{3{,}15 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5} = 1{,}575$ (cm) $\approx$
$\approx 1{,}6$ (cm).

372. a) $0{,}00843 \approx 0{,}008$; $1{,}00281 \approx 1{,}003$; $14{,}1252 \approx 14{,}125$;
$217{,}0962 \approx 217{,}096$;
b) $0{,}00843 \approx 0{,}01$; $1{,}00281 \approx 1{,}00$; $14{,}1252 \approx 14{,}13$; $217{,}0962 \approx 217{,}10$;
c) $0{,}00843 \approx 0{,}0$; $1{,}00281 \approx 1{,}0$; $14{,}1252 \approx 14{,}1$; $217{,}0962 \approx 217{,}1$.

373. a) $x = 1{,}0539 \approx 1{,}054$; $y = 2{,}0216 \approx 2{,}022$; $1{,}054 + 2{,}022 = 3{,}076$;
b) $x = 1{,}0539 \approx 1{,}05$; $y = 2{,}0216 \approx 2{,}02$; $1{,}05 + 2{,}02 = 3{,}07$;
c) $x = 1{,}0539 \approx 1{,}1$; $y = 2{,}0216 \approx 2{,}0$; $1{,}1 + 2{,}0 = 3{,}1$;
d) $x = 1{,}0539 \approx 1$; $y = 2{,}0216 \approx 2$; $1 + 2 = 3$.
Kadangi tiksli sumos reikšmė visą laiką lieka ta pati, tai mažiausią santykinę paklaidą atitinka mažiausia absoliučioji paklaida, t. y. 3,07. Taigi santykinė paklaida mažiausia apvalinant iki tūkstantųjų.

374. Punktuose a), b), d), e), f) skaičiai suapvalinti iki šimtųjų, c) — iki dešimtųjų, g) — iki vienetų, h) — iki dešimčių, i) — iki šimtų.
a) 0,003; b) 0,004; c) 0,001; d) 0,0029; e) 0,004;
f) 0,005; g) 0,007; h) 4,937; i) 28,45.

375. a) $S_{st} = 9 \cdot 4 = 36$; $S_{kv} = a^2 = 36$, tai $a = \sqrt{36} = 6$.
b) Pravartu nusibraižyti brėžinį languotame popieriuje ir nustatyti, kiek langelių turės kiekviena dalis.



376. 35,5–40 cnt saulėgrąžų.

377. a) Kadangi taškų abscisės lygios, o ordinatės priešingos, tai taškai yra simetriški Ox ašies atžvilgiu. b) Kadangi taškų abscisės priešingos, o ordinatės lygios, tai taškai yra simetriški Oy ašies atžvilgiu.

378. a) $A(7; 3)$; $B(7; -3)$; b) $A(-7; -5)$; $B(7; -5)$.

379. Pilnai apsisukdamas apskritimas nurieda 1 m. Stačiakampio perimetras lygus $2(2+4) = 12$ (m), todėl, kad nuriedėtų 12 metrų, apskritimas padarys 12 apsisukimų.

380. a) Spręsti galima įvairiai, pavyzdžiui — surašyti visas partijas. Kai žaidėjai 7, tai būtų

12	13	14	15	16	17
	23	24	25	26	27
		34	35	36	37
			45	46	47
				56	57
					67

Taigi turime $6+5+4+3+2+1 = 21$ partiją.
Išrašę visas partijas, kai yra 10 žaidėjų gausime:
$9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 45$ partijas.
Galima išvesti bendrą formulę, kai turnyre dalyvauja n žaidėjų. Sudarę „trikampį" gausime $S = (n-1)+(n-2)+\dots+2+1$.
„Apsukę" turime $S = 1+2+\dots+(n-2)+(n-1)$. Sudedame abi lygybes: $2S = \underbrace{n+n+\dots+n+n}_{n-1 \text{ dėmenų}} = n(n-1)$. Taigi bus sužaista $S = \frac{n(n-1)}{2}$ partijų. Taikant šią formulę labai supaprastėja ir punkto b) sprendimas.
Paprastas ir kitas partijų skaičiaus radimo būdas. Sakykime, kad visi žaidėjai vienas su kitu žaidžia 2 partijas: vieną baltaisiais, kitą juodaisiais. Tarkime, kad trečias žaidėjas baltaisiais žaidžia su pirmuoju. Tokią partiją žymėsime 31. Atitinkamai 13 reikš, kad šią partiją pirmas numeris žaidžia baltaisiais su trečiuoju. Norint nustatyti, kiek bus „dvigubame" turnyre partijų, užtenka nustatyti, kiek yra porų. Tam galima sudaryti lentelę

*	12	13	14	15	16	17
21	*	23	24	25	26	27
31	32	*	34	35	36	37
41	42	43	*	45	46	47
51	52	53	54	*	56	57
61	62	63	64	65	*	67
71	72	73	74	75	76	*

(su žvaigždutėmis lentelė „tvarkingesnė") ir suskaičiuoti, kad porų (partijų) yra $7 \cdot 6 = 42$, arba remtis kombinatorikos daugybos taisykle: pirmą numerį

galima imti 7 būdais, antrą — 6 būdais (kad ir koks būtų pirmas pasirinkimas), ir vėl gauname $7 \cdot 6 = 42$ partijas. Todėl „viengubame“ turnyre partijų bus du kartus mažiau — 21 partija.
Lygiai taip pat skaičiuojame ir kitais atvejais.

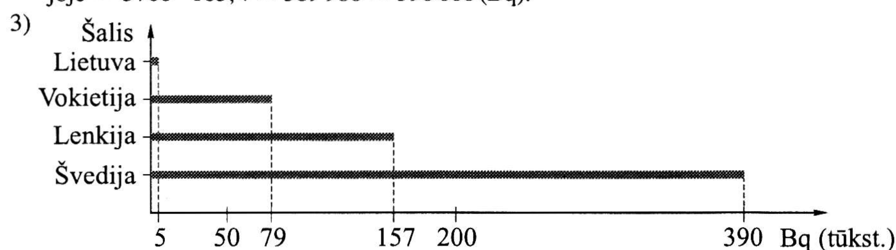
b) Lengva atspėti, kad kai sužaistos 28 partijos, tai žaidėjai 8. Iš tikrųjų, sakykime, kad 7 žaidėjai jau sužaidė visas 21 partiją, bet atėjo 8-tas žaidėjas. Jis turės sužaisti 7 partijas, ir iš viso gausime $21 + 7 = 28$ partijas. Panašiai samprotaudami galime apskaičiuoti, kiek žaidėjų sužaidžia 55 partijas. Iš a) punkto žinome, kad 45 partijas sužaidžia 10 žaidėjų. Atėjęs 11-tas žaidėjas „atsineš“ dar 10 partijų, ir gausime $45 + 10 = 55$ partijas. Galime spręsti ir taikydami punkte a) gautą formulę $S = \frac{n(n-1)}{2}$. Kai $S = 28$, tai $\frac{n(n-1)}{2} = 28$, $n(n-1) = 56$. Reikia rasti du gretimus skaičius, kurių sandauga lygi 56. Iš daugybos lentelės žinome, kad tai 7 ir 8. Vadinasi, $n = 8$.

Atsakymas. a) 21 partija; 45 partijos; b) 8 žaidėjai; 11 žaidėjų.

381. 1) $\frac{5000}{3700} = 1,(351)$ karto.

Siūlome skirti namų darbams.

2) 1993 m. Vokietijoje džiovintų grybų kilograme buvo $3700 \cdot 21,4 = 79\,180 \approx \approx 79\,000$ (Bq); Lenkijoje — $3700 \cdot 42,4 = 156\,880 \approx 157\,000$ (Bq); Švedijoje — $3700 \cdot 105,4 = 389\,980 \approx 390\,000$ (Bq).

3)


4) Labiausiai užteršti grybai — tai ūmėdė ir rudoji meškutė.

5) a) Tauragės apskrityje: $45 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 25,2$ (Bq/kg);
Varėnos rajono Mergežerio miške: $236 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 132,16$ (Bq/kg);
b) Tauragės apskrityje: $45 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 18,9$ (Bq/kg);
Varėnos rajono Mergežerio miške: $236 \cdot 0,6 \cdot 0,7 = 99,12$ (Bq/kg).

6) Klausimas skirtas diskusijoms.

11. GAMYBA IR PREKYBA

Šiame vadovėlio skyriuje plėtojamas *procentų* uždavinių sprendimas susipažįstant su *gamybos* ir *prekybos* organizavimu bei *paslaugų* teikimu. Nagrinėjamos svarbiausios gamybos ir prekybos sąvokos: *gamybos sąnaudos, prekybos išlaidos, gaminio* ar *paslaugos kaina, savikaina, prekės didmeninė* ir *mažmeninė kainos, antkainis, procentinis antkainis, įplaukos, pajamos, pelnas, nuolaida.*

Svarbiausias šio skyriaus tikslas — išmokyti spręsti dviejų-trijų žingsnių procentų uždavinius, gvildenant įvairias gamybos ir prekybos situacijas. Svarbu patiems išsiaiškinti, gerai suprasti ir mokiniams įdiegti ekonomikos pagrindines sąvokas — *pajamas* ir *pelną*. Reikėtų pasiekti, kad mokiniai baigdami nagrinėti skyriaus medžiagą suvoktų:

- prekės kainos evoliuciją, t. y. jos augimą nuo gaminio savikainos iki pirkėjo už prekę sumokamos pinigų sumos;
- kuo gautos už prekes ar paslaugas pajamos skiriasi nuo pelno.

Sprendžiant šio skyriaus uždavinius tikslinga naudotis skaičiuokliu. Aritmetiniai skyriaus uždaviniai labiau skirti visiems siekiantiems minimalaus arba pagrindinio matematinio išsilavinimo lygmens mokiniams, o algebriniai (uždaviniai su parametru) — siekiantiems pagrindinio arba aukštesniojo matematinio išsilavinimo lygmens.

11.1. Prekės kaina. Antkainis

Skyrelyje kartojamas paprasčiausių procentų uždavinių, susijusių su prekyba, sprendimas.

Pavyzdžiais parodoma ir paaiškinama, iš ko susidaro *prekės* ar *paslaugos kaina*. Išsiaiškinama gaminio (prekės) *savikainos* sąvoka. Aptariamos prekės *didmeninė* ir *mažmeninė kainos*. Svarbu suvokti, kad gali būti kelios didmeninės kainos (kai gamintojas prekes parduoda per tarpininkus). Nagrinėjamas *antkainis*, kaip prekės mažmeninės (pardavimo) ir didmeninės (įsigijimo) kainų skirtumas, ir jo procentinė išraiška — *procentinis antkainis*.

Pakartoti:

procento sąvoką;

paprasčiausių procentų uždavinių sprendimą sudarant proporciją.

Išmokti:

apskaičiuoti gaminio (paslaugos) savikainą žinant gamybos sąnaudas (paslaugų teikimo išlaidas) ir pagamintų gaminių (suteiktų paslaugų) kiekį;

pasakyti ir realioje situacijoje atskirti prekės didmeninę ir mažmeninę kainas;

suprasti didmeninės (urmo) prekybos ir mažmeninės prekybos svarbiausius požymius;

rasti prekės antkainį ir procentinį antkainį;

apskaičiuoti prekės pardavimo (mažmeninę) kainą žinant jos pirkimo (didmeninę) kainą ir antkainį arba procentinį antkainį;

apskaičiuoti prekės pirkimo (didmeninę) kainą žinant jos pardavimo (mažmeninę) kainą ir antkainį arba procentinį antkainį.

Šiame skyrelyje:

1. Supažindinama su gamybos organizavimo (paslaugų teikimo) svarbiausiomis sąvokomis. Paprastai lėšos, skirtos gamybai organizuoti, vadinamos *gamybos sąnaudomis*, o prekybai — tiesiog *išlaidomis*.
2. Kalbama apie gaminio *savikainą*. Tai išlaidų, reikalingų gaminio vienetui pagaminti, išraiška pinigais. Jei įdėjus daug pastangų ir lėšų pagaminta mažai prekių, sakoma, kad jų savikaina aukšta. Norint parduoti tokias prekes reikia, kad jos būtų labai geros ar reikalingos.
3. Aiškinama, kas yra prekės ar paslaugos kaina.

Kaina — tai prekės ar paslaugos vertė, išreikšta pinigais.

Šio ekonominio apibrėžimo mokiniai neturi išmokti. Svarbu, kad jie suvoktų apibrėžimo prasmę.

4. Aptariamos prekės pirkimo ir pardavimo kainos. Silpnesniems mokiniams nebūtina žinoti prekės *didmeninės* ir *mažmeninės* kainų sąvokų. Pakanka elementaraus pirkimo ir pardavimo kainų supratimo. Kad ir stipresnieji mokiniai nepainiotų didmeninių ir mažmeninių kainų, reikėtų akcentuoti, kad prekės, perkamos dideliais kiekiais pigiau, parduodamos pirkėjui (ar smulkesniam pardavėjui) mažesniais kiekiais, bet brangiau.
5. Nagrinėjamas prekės pardavimo (mažmeninės) kainos ir pirkimo (didmeninės) kainos skirtumas. Jis vadinamas *antkainiu*. Antkainis leidžia pardavėjui užsidirbti iš prekybos.

Antkainis — tai prekės pardavimo (mažmeninės) kainos ir pirkimo (didmeninės) kainos skirtumas.

Tai irgi nebūtinas apibrėžimas. Pakanka, kad mokiniai suvoktų vadovėlyje pateiktą antkainio blokinę schemą.

6. Piešiniu iliustruojamas pieno kainos augimo parduodant per įvairius tarpininkus mechanizmas. Paprastai, kuo šioje grandinėje daugiau tarpininkų, t. y. antkainių, tuo galutinė prekės pardavimo (mažmeninė) kaina aukštesnė. Moksleiviai galėtų panašią schemą sukurti pavyzdžiams iš realaus gyvenimo.
7. Jeigu antkainis apibūdina priedo prie didmeninės kainos *absoliučiąją reikšmę*, tai *procentinis antkainis* — antkainio ir didmeninės kainos santykinę reikšmę. Antkainis parodo, kiek pajamų gauna pardavėjas pardavęs prekę, o procentinis antkainis — kokią dalį parduodamos prekės kainos sudaro šis antkainis.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai uždaviniai yra 382–394. 395 ir 397 uždaviniais kartojama vienanario ir trinario, dviejų dvinarių daugyba, greitosios daugybos formulės, reiškinio skaitinės reikšmės apskaičiavimas. 398 uždaviniu grįžtama prie nelygybių sprendimo, 399 — laipsnių su sveikaisiais rodikliais, o 400 — daugianarių skaidymo dauginamaisiais. Geometrinei medžiagai pakartoti skirti 396, 401 ir 402 uždaviniai. Paskutinieji du — integruoti, apimantys daugelį klausimų. 403 uždavinys — netradicinės formuluotės, reikalaująs sprendžiant jį kūrybiškumo. 404–406 uždaviniai — praktinio turinio, ypač paskutinysis (su tyrimo elementais). Kruopštumo ir tinkamo matavimo vienetų koordinačių ašyse pasirinkimo reikalauja 405 uždavinio sprendimas. 1–13

382. Cecho visos išlaidos, t. y. gamybos sąnaudos, yra $250 \cdot 320 = 80\,000$ (Lt).

383. Vienos spintos savikaina yra $1\,800\,000 : 400 = 4500$ (Lt).

384. a) Svetainės komplekto didmeninė kaina yra 4000 Lt.
b) Svetainės komplekto mažmeninė kaina yra 4800 Lt.
c) Svetainės komplekto antkainis yra $4800 - 4000 = 800$ (Lt).
d) Svetainės komplekto procentinis antkainis yra $\frac{800 \cdot 100}{4000} = 20(\%)$.

385. a) Parduotuvė pirko kostiumą už 450 Lt.
b) Parduotuvė parduoda kostiumą už 558 Lt.
c) Kostiumo antkainis yra $558 - 450 = 108$ (Lt).
d) Kostiumo procentinis antkainis yra $\frac{108 \cdot 100}{450} = 24(\%)$.

386. a) Parduotuvė įsigijo megztinį už $96 - 16 = 80$ (Lt).
b) Megztinio procentinis antkainis yra $\frac{16 \cdot 100}{80} = 20(\%)$.

387. a) Knygynas įsigijo knygą už $\frac{11{,}22 \cdot 100}{132} = 8{,}5$ (Lt).
b) Knygos antkainis yra $11{,}22 - 8{,}5 = 2{,}72$ (Lt).

11,22 Lt — 132%
x Lt — 100%

388. Visų detalių gamybos sąnaudos yra $\frac{1080 \cdot 100}{4{,}5} = 24\,000$ (Lt), o vienos detalės savikaina — $24\,000 : 500 = 48$ (Lt).

1080 Lt — 4,5%
x Lt — 100%

389. a) Palto didmeninė kaina yra $\frac{480 \cdot 102{,}5}{100} = 492$ (Lt).
b) Palto didmeninė kaina yra $\frac{800 \cdot 103{,}5}{100} = 828$ (Lt).

390. a) Knygų didmeninė kaina didesnė už savikainą $\frac{(5{,}5-5) \cdot 100}{5} = 10(\%)$.
b) Knygos savikaina yra $\frac{8{,}6 \cdot 100}{107{,}5} = 8$ (Lt).

x Lt — 100%
8,6 Lt — 107,5%

391. a) Parduotuvė perka detalę už $\frac{40 \cdot 110}{100} = 44$ (Lt).
b) Detalės kaina parduotuvėje yra $\frac{44 \cdot 130}{100} = 57{,}2$ (Lt).
c) Detalės antkainis savikainos atžvilgiu yra $57{,}2 - 40 = 17{,}2$ (Lt).

392. a) Prekės savikaina yra $\frac{30 \cdot 100}{120} = 25$ (Lt).

x Lt — 100%
30 Lt — 120%

b) Prekės kaina parduotuvėje yra $\frac{30 \cdot 133\frac{1}{3}}{100} = 40$ (Lt).

30 Lt — 100%
y Lt — $133\frac{1}{3}$%

c) Prekės antkainis savikainos atžvilgiu yra $40 - 25 = 15$ (Lt).

393. a) Antkainis lygus $2562,2 - 2228 = 334,2\,(\text{Lt})$, o procentinis antkainis — $\frac{334,2\cdot 100}{2228} = 15(\%)$.

b) Prekės antkainis lygus $22,5 \cdot 0,16 = 3,6\,(\text{Lt})$, todėl pardavimo kaina yra $22,5 + 3,6 = 26,1\,(\text{Lt})$;
arba:
Prekės pardavimo kaina yra $22,5 \cdot 1,16 = 26,1\,(\text{Lt})$, todėl antkainis lygus $26,1 - 22,5 = 3,6\,(\text{Lt})$.

c) Prekės pirkimo kaina yra $57,97 - 31,62 = 26,35\,(\text{Lt})$, todėl procentinis antkainis lygus $\frac{31,62\cdot 100}{26,35} = 120(\%)$.

26,35 Lt — 100%
31,62 Lt — x%

d) Prekės pirkimo kaina yra $\frac{641,7\cdot 100}{142,6} = 450\,(\text{Lt})$, todėl antkainis lygus $641,7 - 450 = 191,7\,(\text{Lt})$.

y Lt — 100%
641,7 Lt — 142,6%

394. a) Sąsiuvinių pirkimo kaina $0,35 \cdot 600 + 0,38 \cdot 500 = 210 + 190 = 400\,(\text{Lt})$.

b) Sąsiuvinių pardavimo kaina, t. y. įplaukos už parduotus sąsiuvinius, yra $0,4(600 + 500) = 440\,(\text{Lt})$.

c) Sąsiuvinių pardavimo procentinis antkainis lygus $\frac{40\cdot 100}{400} = 10(\%)$.

400 Lt — 100%
40 Lt — x%

395. a) $6a^4 - 3a^3 + 9a^2$; b) $9a^2 - 6ab + b^2$; c) $12x^2 + 4x - 5$; d) $4x^2 - 1$; e) $a - 4$; f) $-4a$.

396. a) Kadangi trikampio kampų dydžių santykis yra 1 : 2 : 3, tai trikampio kampus patogu pažymėti x, $2x$ ir $3x$. Sudarome lygtį $x + 2x + 3x = 180°$, $x = 30°$. Vadinasi, trikampio kampai yra 30°, 60°, 90°.

b) Statusis trikampis.

Galite paklausti, ar trikampio kraštinių ilgių santykis gali būti 1 : 2 : 3.

397. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$; kai $x = -5$, tai $(x-1)^2 = (-5-1)^2 = 36$; kai $x = -1,5$, tai $(x-1)^2 = (-1,5-1)^2 = 6,25$.

398. a) $x > 10$; b) $x \geqslant \frac{1}{7}$.

399. a) $-3^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -\frac{1}{3} - (2^{-1})^{-2} = -\frac{1}{3} - 2^2 = -4\frac{1}{3}$;

b) $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1} - 0,2^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{2}{5} - (5^{-1})^{-2} = \frac{2}{5} - 5^2 = -24\frac{3}{5}$.

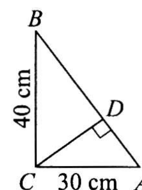
400. a) $5m^2(m+3)$; b) $(2x - 3y)(2x + 3y)$; c) $ab(b-2)$; d) $(m-2)(m+n)$; e) $(a+c)(a-b)$; f) $3(a-b)^2$; g) $(10x - 3)(10x + 3)$; h) $(y-5)^2$.

401. a) $AB = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50\,(\text{cm})$.

b) $S_{\triangle ABC} = \frac{30\cdot 40}{2} = 30 \cdot 20 = 600\,(\text{cm}^2)$.

c) $CD = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{2\cdot 600}{50} = 24\,(\text{cm})$.

d) $\begin{matrix}(30+40)\,\text{cm} — x\% \\ 50\,\text{cm} — 100\%\end{matrix} \longrightarrow x = \frac{(30+40)\cdot 100}{50} = 140(\%)$.



402. a) 20 cm; b) 24 cm; c) 384 cm^2; d) 19,2 cm.

403. *I būdas.* Trijų vienas po kito einančių nelyginių skaičių suma yra, pavyzdžiui, $(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) = 6n + 9$, ir pagal sąlygą $6n + 9 = k$. Kitų po jų einančių trijų nelyginių skaičių suma yra $(2n+7) + (2n+9) + (2n+11) = 6n + 27 = 6n + 9 + 18 = (6n+9) + 18 = k + 18$.

II būdas. Jei trijų nelyginių skaičių suma lygi k, tai vidurinis lygus $\frac{k}{3}$. Tada trečias skaičius lygus $\frac{k}{3} + 2$, po jo einantys skaičiai yra $\frac{k}{3} + 4$, $\frac{k}{3} + 6$, $\frac{k}{3} + 8$. Taigi jų suma lygi $k + 18$.

404. Vadovėlyje be reikalo nuspalvintos gegnes tvirtinančios sijos. Pagal brėžinį pastato stogas yra dvišlaitis. Stogo danga bus tvirtinama ant pakloto, padėto ant penkių remtinių gegnių porų. Kadangi gegnės ilgį atitinka stačiojo trikampio įžambinės ilgis, tai vienos gegnės ilgis (pagal Pitagoro teoremą) $\sqrt{3^2 + (7 - 3,6)^2} = \sqrt{9 + 3,4^2} = \sqrt{20,56} = 4,5343... \approx 4,534\,(\text{m})$. Bendras dešimties gegnių ilgis bus $4,534 \cdot 10 = 45,34\,(\text{m}) \approx 45,5\,\text{m}$ (0,5 m tikslumu). Akivaizdu, kad dešimčiai gegnių $\approx 45,0$ metrų nepakanka. Gegnių su sijomis ilgis yra $4,534 \cdot 10 + 6 \cdot 5 \approx 75,34\,(\text{m})$.

Enciklopedijoje rašoma, kad *gegnė* — vienašlaitį ar dvišlaitį stogą laikanti statybinė konstrukcija. Stogo danga tvirtinama prie grebėstų arba lentų pakloto, pritvirtintų prie gegnių.

405. Labai svarbu reikiamai pasirinkti mastelį koordinačių ašyse.

Jeigu, pavyzdžiui, horizontaliosios ašies mokyklinio sąsiuvinio keturi langeliai atitinka 1000 m, o vertikaliosios ašies 2 langeliai — 100 mm, tai atmosferos slėgio priklausomybės nuo aukščio grafiką galima bus nubraižyti tik dvigubame mokyklinio sąsiuvinio lape.

Geriausia būtų braižyti grafiką milimetrinio popieriaus lape.

a) Kai aukštis 600 m, tai slėgis $\approx$ 710 mm gyvsidabrio stulpelio;
kai aukštis 1500 m, tai slėgis $\approx$ 640 mm gyvsidabrio stulpelio;
kai aukštis 3000 m, tai slėgis $\approx$ 530 mm gyvsidabrio stulpelio;
kai aukštis 4000 m, tai slėgis $\approx$ 470 mm gyvsidabrio stulpelio;
kai aukštis 6500 m, tai slėgis $\approx$ 340 mm gyvsidabrio stulpelio;
kai aukštis 10 000 m, tai slėgis $\approx$ 220 mm gyvsidabrio stulpelio;

b) slėgis lygus 600 mm gyvsidabrio stulpelio, kai aukštis $\approx$ 2100 m;
slėgis lygus 400 mm gyvsidabrio stulpelio, kai aukštis $\approx$ 5200 m;
slėgis lygus 250 mm gyvsidabrio stulpelio, kai aukštis $\approx$ 8800 m;
slėgis lygus 200 mm gyvsidabrio stulpelio, kai aukštis $\approx$ 10 500 m;
slėgis lygus 150 mm gyvsidabrio stulpelio, kai aukštis $\approx$ 12 300 m.

406. Teritorijos ilgis plane yra 5,9 cm, tai vietovėje — $5{,}9 \cdot 600 = 35{,}4$ (m), plotis plane yra 3,8 cm, tai vietovėje — $3{,}8 \cdot 600 = 22{,}8$ (m); mokyklos ilgis plane yra 2,7 cm, tai vietovėje — $2{,}7 \cdot 600 = 16{,}2$ (m), plotis plane yra 1,7 cm, tai vietovėje — $1{,}7 \cdot 600 = 10{,}2$ (m).

a) Mokyklos teritorijos plotas lygus $35{,}4 \cdot 22{,}8 = 807{,}12\,(\mathrm{m}^2) \approx 807\,\mathrm{m}^2$.
Tvoros ilgis yra $35{,}4 + 22{,}8 + 19{,}2 + 12{,}6 = 90{,}0 = 90$ (m).

b) Žaidimų aikštelė nuo mokyklos turi būti plane ne arčiau kaip $900 : 600 =$ $= 1{,}5$ (cm), o nuo gėlyno ne arčiau kaip $300 : 600 = 0{,}5$ (cm).
Plano dešiniajame viršutiniame kampe žaidimų aikštelės matmenys būtų:
$1{,}7\,\mathrm{cm} \times 2{,}2\,\mathrm{cm}$ ($5{,}9 - 2{,}7 - 1{,}5 = 1{,}7$ (cm); $3{,}8 - 1{,}1 - 0{,}5 = 2{,}2$ (cm)).
Plano kairiajame apatiniame kampe žaidimų aikštelės matmenys būtų:
$4{,}1\,\mathrm{cm} \times 0{,}6\,\mathrm{cm}$ ($5{,}9 - 1{,}3 - 0{,}5 = 4{,}1$ (cm); $3{,}8 - 1{,}7 - 1{,}5 = 0{,}6$ (cm)).

c) Vienos aikštelės plotas lygus $1{,}7 \cdot 600 \times 2{,}2 \cdot 600 = 1\,346\,400\,(\mathrm{cm}^2) =$ $= 134{,}64\,(\mathrm{m}^2) \approx 134{,}6\,(\mathrm{m}^2)$, kitos aikštelės plotas — $4{,}1 \cdot 600 \times 0{,}6 \cdot 600 =$ $= 885\,600\,(\mathrm{cm}^2) = 88{,}56\,(\mathrm{m}^2) \approx 88{,}6\,(\mathrm{m}^2)$.
Didžiausio ploto ($\approx 135\,\mathrm{m}^2$) aikštelės ilgis yra 10,2 m, plotis — 13,2 m.

Šiame skyrelyje aiškinimui supaprastinti nagrinėjama tik situacija prekyboje. Panašiai galima nagrinėti gamybinių ar paslaugų teikimo įmonių pajamas ir pelną. Pardavus prekę antkainis, t. y. prekės pardavimo (mažmeninės) kainos ir pirkimo (didmeninės) kainos skirtumas, tampa pardavėjo *pajamomis*. Vadinasi, visos pardavėjo *pajamos* — parduotų prekių antkainių suma. Jas galima apskaičiuoti ir kitaip — rasti parduotuvės *įplaukų* už parduotas prekes ir įsigyjant šias prekes sumokėtų pinigų skirtumą.
Pajamos dar nėra *pelnas*. Paprastai parduotuvė turi įvairiausių prekybos *išlaidų* (kaštų). Jas sudaro: patalpų nuoma, įranga, elektra, ryšiai, apsauga, reklama, parduotuvės darbuotojų darbo užmokestis, pridėtosios vertės mokestis (PVM) ir kt. Taigi *pelnas* (*nuostolis*) yra pajamų dalis, likusi atskaičius visas *išlaidas*.
Pastaba. Pridėtosios vertės ir kiti mokesčiai bus nagrinėjami 9 klasėje.

Pakartoti:

antkainio sąvoką ir prasmę;
racionaliųjų skaičių veiksmus.

Išmokti:

sąvokų įplaukos, pajamos, pelnas skirtumus;
rasti prekybos įmonės pajamas, kai žinomos įplaukos už parduotas prekes ir pinigai, išleisti šioms prekėms įsigyti;
suskaičiuoti parduotuvės pelną (nuostolį) žinant pajamas ir prekybos išlaidas.

Šiame skyrelyje:

1. Aptariamas įplaukų už parduotas prekes ir sumokėtų už prekes pinigų skirtumas — *pajamos*.
   Kita vertus, *pajamos* — prekybos įmonės pinigai, uždirbti iš antkainio.
2. Išsiaiškinama, kas sudaro *prekybos išlaidas*: patalpų nuoma, įranga, reklama, apsauga, draudimas, ryšiai, elektra, mokesčiai, atlyginimai ir kt. Kartais *išlaidos* vadinamos *kaštais*. Tačiau kalbininkai siūlo šio žodžio geriau nevartoti.
3. Įvertinamas pajamų ir išlaidų skirtumas. Kai šis skirtumas teigiamas — gaunama *pelno*, o kai neigiamas — patiriamas *nuostolis*.
4. Pavyzdžiu gvildenamas iš pirmo žvilgsnio paradoksalus dalykas: pardavinėjant basutes gaunamos nemažos įplaukos, pardavėjas turi pajamų, bet patiria nuostolį. Mat prekybos išlaidos viršija gautas pajamas.
5. Atsakant į skyrelio pirmąją užduotį, pažymėtą klaustuku, parduotuvės savininką reikėtų paguosti tuo, kad pardavęs likusias basutes po 34 Lt už porą savininkas turės dar $(34-24)\cdot 265 = 2650$ (Lt) pajamų, o prekybos išlaidos jau buvo įskaičiuotos. Vienintelis blogumas, kad jau artėja prasti orai, tad vargiai ar kas pirks basutes. Bet gal jas pavyks parduoti nuleidus kainą arba kitą pavasarį. (Apie prekybos nuolaidas bus kalbama 3 skyrelyje.)
   Pastaba. Čia kol kas mes neskaičiuojame PVM.
6. Atsakant į skyrelio antrąją užduotį samprotauti reikėtų taip:
   kad kiosko savininko pelnas sudarytų ne mažiau kaip 10% prekių įsigijimo kainos, jis turi būti ne mažesnis kaip $\frac{4000\cdot 10}{100} = 400$ (Lt).
   Kiosko savininko pajamos turi būti ne mažesnės kaip $400 + 1040 = 1440$ (Lt).
   Kad kiosko savininkas gautų ne mažesnes kaip 1440 Lt pajamas, jis turi taikyti ne mažesnį kaip $\frac{1440\cdot 100}{4000} = 36(\%)$ antkainį.

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai skyrelio uždaviniai įskaitant ir ankstesniojo skyrelio kartojimą ir plėtojimą yra 407–422. 423 ir 425 uždaviniais kartojama skyriaus „Laipsnis“, o 424 uždaviniu — skyriaus „Nelygybės“ medžiaga. 426 uždaviniu sugrįžtama prie nelengvo dalyko — skaidymo dauginamaisiais. 428 uždaviniu kartojamas paprastųjų trupmenų palyginimas, jų keitimas dešimtainėmis trupmenomis. Kompleksiškai geometrijos medžiaga nagrinėjama 427 uždaviniu. Praktinių 429 ir 430 uždavinių sprendimas remiasi Pitagoro teoremos taikymu. Papildomi skyrelio uždaviniai uždavinyne įvairesni, sudėtingesni, o tuo pačiu ir įdomesni palyginus su vadovėlio pratimais ir uždaviniais. 14–27

407. Daržovių parduotuvės pajamos yra $6500 - 5600 = 900$ (Lt).
a) Parduotuvės pelnas yra $900 - 850 = 50$ (Lt).
b) Parduotuvės nuostolis yra $920 - 900 = 20$ (Lt).

408. a) $2500 + 250 = 2750$ (Lt); b) $2500 - 70 = 2430$ (Lt);
c) $2500 + 142 = 2642$ (Lt); d) $2500 - 58 = 2442$ (Lt).

409. a) $6000 - 350 = 5650$ (Lt); b) $6000 + 30 = 6030$ (Lt);
c) $6000 - 247 = 5753$ (Lt); d) $6000 + 17 = 6017$ (Lt).

410. a) 10 spintų kainavo $2500 \cdot 10 = 25\,000$ (Lt), o 17 spintų — 42 500 Lt.
b) Už 10 spintų įplaukos yra $3250 \cdot 10 = 32\,500$ (Lt), o už 17 spintų — 55 250 Lt.

c) Parduotuvės pajamos pardavus 10 spintų yra $32\,500 - 25\,000 = 7500$ (Lt), o pardavus 17 spintų — $55\,250 - 42\,500 = 12\,750$ (Lt).

411. a) Parduotuvės pajamos už 10 kostiumų yra $(659 - 550) \cdot 10 = 1090$ (Lt).
b) Salono pajamos už 5 šaldytuvus yra $(1589 - 1520) \cdot 5 = 345$ (Lt).

412. a) Parduotuvė turės įplaukų: $4 \cdot 1 = 4$ (Lt), $4 \cdot 5 = 20$ (Lt), $4 \cdot 10 = 40$ (Lt), $4 \cdot 50 = 200$ (Lt), $4 \cdot 100 = 400$ (Lt).
b) Parduotuvės įplaukos už n detalių yra $4 \cdot n = 4n$ (Lt).
c) Jei parduotuvė turėjo 92 Lt įplaukų, tai pardavė $92 : 4 = 23$ (detales); jei 120 Lt įplaukų, tai — $120 : 4 = 30$ (detalių).
d) Pajamos už 1 parduotą detalę yra $4 - 2{,}5 = 1{,}5$ (Lt).
Kad gautų ne mažiau kaip 120 Lt pajamų, parduotuvė turi parduoti ne mažiau kaip $120 : 1{,}5 = 80$ (detalių).
Kad gautų daugiau kaip 66 Lt pajamų, parduotuvė turi parduoti daugiau kaip $66 : 1{,}5 = 44$ (detales).

413. a) Knygyno įplaukos yra 10,5 Lt, 31,5 Lt, 157,5 Lt, 315 Lt, 1260 Lt.
b) Knygyno įplaukos pardavus x knygų yra $10{,}5x$ Lt.
c) Pardavė 17 knygų, 29 knygas.
d) Ne daugiau kaip 48 knygas; mažiau kaip 60 knygų.

414. a) Bandelės savikaina yra $500 : 2500 = 0{,}2$ (Lt).
b) Kavinėje bandelės pardavinėjamos po $0{,}2 \cdot 1{,}35 = 0{,}27$ (Lt).
c) Bandelės antkainis yra $0{,}27 - 0{,}2 = 0{,}07$ (Lt), todėl pajamos pardavus visas bandeles bus $0{,}07 \cdot 2500 = 175$ (Lt).
d) Kepyklos pelnas per dieną būtų $175 - 125 = 50$ (Lt).

415. a) Suknelės pasiuvimo savikaina yra $7100 : 800 = 88{,}75$ (Lt).
b) Suknelės pardavinėjamos po $88{,}75 \cdot 1{,}24 = 110{,}05$ (Lt).
c) Suknelės pardavimo antkainis yra $110{,}05 - 88{,}75 = 21{,}3$ (Lt), todėl pajamos pardavus visas sukneles bus $21{,}3 \cdot 800 = 17\,040$ (Lt).
d) Siuvyklos pelnas būtų $17\,040 - 15\,000 = 2040$ (Lt).

Sąlygoje yra klaida — išlaidos sudaro 15 000 Lt, o ne 1500 Lt!

416. a) Kostiumėlio antkainis yra $(x - 250)$ Lt, tad pajamos už 20 kostiumėlių bus $(x - 250) \cdot 20 = (20x - 5000)$ Lt, o už n kostiumėlių — $(x - 250) \cdot n = (nx - 250n)$ Lt.
b) Batų poros antkainis yra $(300 - x)$ Lt, tad pajamos už 15 porų batų bus $(300 - x) \cdot 15 = (4500 - 15x)$ Lt, o už n porų batų — $(300 - x) \cdot n = (300n - nx)$ Lt.

417. a) Televizoriaus mažmeninė kaina yra $x \cdot 1{,}32 = 1{,}32x$ (Lt).
b) Televizoriaus antkainis yra $1{,}32x - x = 0{,}32x$ (Lt).
c) Pardavimo procentinis antkainis yra $\frac{0{,}32x \cdot 100}{x} = 32(\%)$.
d) Parduotuvė pardavė $(4{,}8x) : (0{,}32x) = 15$ (televizorių).
e) Kad būtų gauta daugiau kaip $20x$ Lt pajamų, turi būti parduota daugiau kaip $(20x) : (0{,}32x) = 62{,}5$ (televizoriaus), t. y. ne mažiau kaip 63 televizoriai.

x Lt — 100%
$0{,}32x$ Lt — ?%

418. a) Grotuvo didmeninė kaina yra $\frac{x \cdot 100}{125} = 0{,}8x$ (Lt).
b) Grotuvo pardavimo antkainis yra $x - 0{,}8x = 0{,}2x$ (Lt).
c) Grotuvo procentinis antkainis yra $\frac{0{,}2x \cdot 100}{0{,}8x} = 25(\%)$.
d) Įplaukos pardavus 20 grotuvų yra $x \cdot 20 = 20x$ (Lt), o pardavus n grotuvų — $x \cdot n = nx$ (Lt).
e) Jei pajamos sudarė $3x$ Lt, tai parduotuvė pardavė $(3x) : (0{,}2x) = 15$ (grotuvų).
f) Kad būtų gauta daugiau negu $1{,}5x$ Lt pajamų, turi būti parduota daugiau kaip $(1{,}5x) : (0{,}2x) = 7{,}5$ (grotuvo), t. y. ne mažiau kaip 8 grotuvai.

x Lt — 125%
? Lt — 100%

419. a) Prekeivis patyrė nuostolį;
b) prekeivis turėjo pelno;
c) prekeivis turėjo daugiau išlaidų negu pajamų, todėl patyrė nuostolį;
d) prekeivis turėjo daugiau pajamų negu išlaidų, todėl turėjo pelno;
e) pajamos yra mažesnės už išlaidas, nes pajamų ir išlaidų santykis lygus $\frac{8}{10}$, vadinasi, prekeivis patyrė nuostolį;
f) pajamos viršija išlaidas, nes jų santykis 1,2, vadinasi, prekeivis turėjo pelno.

420. a) Bendrovės pajamos yra 45 tūkst. − 34 tūkst. = 11 tūkst. (Lt).
b) Bendrovės išlaidos yra $1500 + 650 + 4000 + 600 + 122{,}5 + 1677{,}5 = 8550$ (Lt).
c) Bendrovės pelnas yra $11\,000 - 8550 = 2450$ (Lt).

421. a) Parduotuvės pajamos yra $15\,020 - 12\,000 = 3020$ (Lt).
b) Parduotuvės išlaidos yra $300 + 320 + 250 + 1200 + 460{,}55 = 2530{,}55$ (Lt).
c) Parduotuvės pelnas yra $3020 - 2530{,}55 = 489{,}45$ (Lt).

422. a) *I būdas.* Drabužių parduotuvės pajamos yra $12\,000 \cdot 0{,}15 = 1800$ (Lt), o išlaidos — $274{,}5 + 1600 = 1874{,}5$ (Lt).
Parduotuvės nuostolis yra $1874{,}5 - 1800 = 74{,}5$ (Lt).
II būdas. Parduotuvės įplaukos už parduotas prekes yra $12\,000 \cdot 1{,}15 = 13\,800$ (Lt) ir pajamos — $13\,800 - 12\,000 = 1800$ (Lt).
Parduotuvės išlaidos yra $274{,}5 + 1600 = 1874{,}5$ (Lt).
Parduotuvės nuostolis yra $1874{,}5 - 1800 = 74{,}5$ (Lt).

Šio skyrelio uždaviniuose neskaičiuojamas pridėtosios vertės mokestis (PVM).

b) Drabužių parduotuvės pajamos yra $\frac{9200 \cdot 15}{115} = 1200$ (Lt);
arba:
Parduotuvės prekių įsigijimo kaina yra $\frac{9200 \cdot 100}{115} = 8000$ (Lt), todėl pajamos jas pardavus yra $9200 - 8000 = 1200$ (Lt).
Parduotuvės išlaidos yra $183{,}5 + 1050 = 1233{,}5$ (Lt).
Parduotuvės nuostolis yra $1233{,}5 - 1200 = 33{,}5$ (Lt).

9200 Lt — 115%
x Lt — 15%

9200 Lt — 115%
y Lt — 100%

Atsakymas. Parduotuvė turėjo 33,5 Lt nuostolį.

„Kaip sekėsi prekyba?“ — klausimas diskusijoms. Gerai — kad pardavė visas prekes, blogai — kad negavo pelno, o patyrė nuostolį.

423. a) $-16a^3b^5$; b) $\frac{1}{8}x^3y^6$; c) $4a^{-3}b^2 = \frac{4b^2}{a^3}$; d) ab.

424. a) Kai $x = -1$, tai $1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2 = (1 - (-1))^2 = 4$, o $x + 5 = -1 + 5 = 4$; kadangi $4 = 4$, tai -1 yra lygties sprendinys.
b) Kai $x = -1$, tai $x^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0$, o $x = -1$; kadangi $0 \geqslant -1$, tai -1 yra nelygybės sprendinys.

425. a) $\frac{2^{-10} \cdot 4^{-2}}{2^{-11}} = \frac{2^{-10} \cdot (2^2)^{-2}}{2^{-11}} = \frac{2^{-14}}{2^{-11}} = 2^{-14-(-11)} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$;
b) $2^{-1} - 5 \cdot (-0{,}4)^2 = \frac{1}{2} - 5 \cdot 0{,}16 = \frac{1}{2} - 0{,}8 = -0{,}3$.

426. a) $(a - x)(a - y)$;
b) $b^2 - a^2 - 2a - 1 = b^2 - (a^2 + 2a + 1) = b^2 - (a + 1)^2 = (b - a - 1)(b + a + 1)$.

427. a) Jeigu stačiakampio dvi gretimos kraštinės yra $3x$ cm ir $4x$ cm, tai pagal Pitagoro teoremą $(3x)^2 + (4x)^2 = 10^2$, $x = 2$. Stačiakampio kraštinės yra 6 cm ir 8 cm.
b) 3 cm, 4 cm.
c) Stačiakampis turi dvi simetrijos ašis.
d) *Nurodymas.* Kad tilptų mokyklinio sąsiuvinio lape, patogu braižyti masteliu 1 : 2 arba 1 : 1.

428. a) Galima spręsti dviem būdais: suvienodinti trupmenų vardiklius arba išreikšti paprastąsias trupmenas dešimtainėmis.
I būdas. Bendras vardiklis $A = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$, todėl

$$\frac{2 \cdot 2^5 \cdot 5}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5}, \frac{3 \cdot 2^3 \cdot 3^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5}, \frac{11 \cdot 2^4 \cdot 5}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5}, \frac{1 \cdot 2^5 \cdot 3^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5}, \frac{19 \cdot 2^4 \cdot 3}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5}, \frac{17 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5}; \quad \frac{320}{A}, \frac{216}{A}, \frac{880}{A}, \frac{288}{A}, \frac{912}{A}, \frac{765}{A}.$$

II būdas. 0,(2); 0,15; 0,6(1); 0,2; 0,6(3); 0,53125.

Atsakymas. a) $\frac{3}{20}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{17}{32}, \frac{11}{18}, \frac{19}{30}$; b) $\frac{3}{20}, \frac{1}{5}, \frac{17}{32}$.

429. a) Laido tarp dviejų stulpų ilgis lygus:

$$2\sqrt{\left(\frac{12{,}5}{2}\right)^2 + (12 - 6{,}75)^2} = 2\sqrt{39{,}0625 + 27{,}5625} \approx 16{,}33 \text{ (m)}.$$

b) Reikės $800 : 50 + 1 = 17$ (porų stulpų).
Gatvės apšvietimui sunaudota $16{,}325 \cdot 17 = 277{,}525 \approx 278$ (m) laido.

430. $50\,\ell$ vandens atitinka $\frac{50}{1000} = 0{,}05\,\text{m}^3$, o $130\,\ell$ — $0{,}13\,\text{m}^3$.
a) $3{,}11 \cdot 0{,}05 + 14 \cdot 0{,}13 = 1{,}9755 \approx 1{,}98$ (Lt).
b) $1{,}9755 \cdot 52 \cdot 2 = 205{,}452 \approx 205{,}5$ (Lt).

Laikome, kad metuose yra lygiai 52 savaitės.

11.3. Nuolaida

Su nuolaida mokiniai jau susidūrė spręsdami paprasčiausius procentų uždavinius 7 klasėje. Šio skyrelio teorinėje dalyje aptariama *nuolaidos* samprata bei dažniausi atvejai, kuomet ji taikoma. Sprendžiami jau kelių žingsnių procentų uždaviniai įskaitant ir *procentinės nuolaidos* skaičiavimą. Skyrelio uždaviniai kartu sistemina supratimą apie prekių gamybą ir prekybą panaudojant viso skyriaus naują medžiagą.

Pakartoti:

nuolaidos skaičiavimą;
procentinės nuolaidos radimą;
prekės didmeninę ir mažmeninę kainas, pajamas, pelną.

Išmokti:

rasti prekės naująją kainą žinant, kad prekei taikyta nuolaida du kartus;
rasti, kiek procentų reikia padidinti (sumažinti) prekės naująją kainą, kad būtų atstatyta pradinė jos kaina.

Šiame skyrelyje:

1. Aptariami dažniausi *nuolaidų* taikymo atvejai: šventinė prekyba, išpardavimai, paklausos sumažėjimas, nuolatiniai klientai, prekyba urmu, prekių sezoniškumas ir kt.
2. Grafinis piešinys padeda suvokti, jog

   [Nuolaida] = [Pradinė kaina] − [Naujoji kaina]

3. Primenama, kad nuolaida, išreikšta procentais pradinės kainos atžvilgiu, vadinama *procentine nuolaida.*

PRATIMAI IR UŽDAVINIAI

Teminiai skyrelio uždaviniai yra 431–440. Pradedant 434 uždaviniu lygiagrečiai kartojama ir plėtojama ankstesniuose skyreliuose nagrinėta medžiaga. 434, 435, 437 uždaviniais ne tik nagrinėjama prekyba su nuolaida, bet ji siejama su pajamų skaičiavimu. 436 uždavinyje mokoma rasti, kiek procentų reikia padidinti prekės naująją kainą su nuolaida, kad būtų atstatyta pradinė jos kaina, arba kokią reikia taikyti procentinę nuolaidą, kad būtų atstatyta pradinė kaina. 438–440 uždaviniais mokoma rasti prekės naująją kainą (įsigyto daikto vertę) taikant nuolaidą (esant nuvertėjimui) du kartus. 442 ir 443 uždaviniais gvildenamas prekybos organizavimo mechanizmas įtvirtinant įvairius skyriuje nagrinėtus skaičiavimus nuo prekės didmeninės kainos iki prekybos įmonės gauto pelno. 440–443 uždavinių sprendimas sudaro galimybę apibendrintai pakartoti viso skyriaus medžiagą, kartu pajusti prekybos organizavimą, kaip proceso visumą. 444 uždaviniu kartojama vienanarių ir daugianarių daugyba, greitosios daugybos formulės, panašiųjų narių sutraukimas. 445 uždaviniu grįžtama prie tapatybių įrodymo, o 447 — reiškinio skaitinės reikšmės radimo. Lygčių sprendimą plėtoja 446 ir 448 uždaviniai. 449 uždavinys skirtas nelygybei sudaryti ir spręsti. 450 ir 451 uždaviniai sugrąžina mokinius prie geometrijos uždavinių sprendimo taikant Pitagoro teoremą, primena trapecijos perimetro ir ploto apskaičiavimus. 452–454 uždaviniais kartojamos ir plėtojamos žinios apie proporcijas, lyginius ir nelyginius skaičius, lygių atkarpų ir taškų skaičiaus tiesėje sąsajas. Praktinės problemos sprendžiamos 455–458 uždaviniais. Reikėtų atkreipti dėmesį į savotišką nuolaidos formą sprendžiant uždavinyno 28–29 uždavinius. 28–42

431. a) Nuolaida sudarė $250 \cdot 0,12 = 30$ (Lt).
b) Batai parduoti už $250 - 30 = 220$ (Lt).

432. a) Batų pradinė kaina buvo $\frac{119 \cdot 100}{85} = 119 : 0,85 = 140$ (Lt).
b) Nuolaida sudarė $140 - 119 = 21$ (Lt).

x Lt — 100%
119 Lt — 85%

433. a) Už prekių rinkinį reikės mokėti $84 \cdot 0,955 = 80,22$ (Lt).
b) Būtų reikėję mokėti $\frac{91,68 \cdot 100}{95,5} = 91,68 : 0,955 = 96$ (Lt).

91,68 Lt — 95,5%
x Lt — 100%

434. a) Planuota prekės pardavimo kaina buvo $50 \cdot 1,3 = 65$ (Lt).
b) Nuolaida pirkėjui sudaro $65 \cdot 0,05 = 3,25$ (Lt).
c) Prekė parduota pirkėjui už $65 - 3,25 = 61,75$ (Lt).
d) Savininko pajamos už vieną prekę yra $62,75 - 50 = 11,75$ (Lt).
e) Pajamos sudaro $\frac{11,75 \cdot 100}{50} = 23,5$(%) prekės įsigijimo kainos.

50 Lt — 100%
11,75 Lt — x%

435. a) Planuota kostiumo pardavimo kaina buvo $300 \cdot 1,2 = 360$ (Lt).
b) Nuolatiniam pirkėjui kostiumas parduotas už $360 \cdot 0,92 = 331,2$ (Lt).
c) Pajamos už parduotą kostiumą yra $331,2 - 300 = 31,2$ (Lt).
d) Pajamos sudarė $\frac{31,2 \cdot 100}{300} = 10,4$ (%) kostiumo įsigijimo kainos.

436. a) Prekės kaina su kalėdine nuolaida yra $80 \cdot 0,8 = 64$ (Lt). Po Naujųjų metų prekę reikia pabranginti $80 - 64 = 16$ (Lt), t. y. jos kainą (64 Lt) padidinti $\frac{16 \cdot 100}{64} = 25(\%)$.

64 Lt — 100%
16 Lt — x%

b) Prekės kaina su antkainiu yra $80 \cdot 1,25 = 100$ (Lt). Prekės kainą reikia sumažinti $100 - 80 = 20$ (Lt), t. y. $\frac{20 \cdot 100}{100} = 20(\%)$.

100 Lt — 100%
20 Lt — x%

437. a) Norėta parduoti prekes už $a \cdot 1,45 = 1,45a$ (Lt).
b) Prekės urmu buvo parduotos už $1,45a \cdot 0,8 = 1,16a$ (Lt).
c) Parduotuvės savininkas gavo $1,16a - a = 0,16a$ (Lt) pajamų.

438. a) Norėta parduoti prekę už $a \cdot 0,85 = 0,85a$ (Lt).
b) Prekė buvo parduota už $0,85a \cdot 0,8 = 0,68a$ (Lt).
c) Per abu kartus prekės kaina buvo sumažinta $a - 0,68a = 0,32a$ (Lt), t. y. $\frac{0,32a \cdot 100}{a} = 32(\%)$.

a Lt — 100%
$0,32a$ Lt — x%

439. a) Po metų automobilio vertė bus $40\,000 \cdot 0,8 = 32\,000$ (Lt), o po dvejų metų bus $32\,000 \cdot 0,85 = 27\,200$ (Lt).
b) Po metų automobilio vertė bus $25\,000 \cdot 0,8 = 20\,000$ (Lt), o po dvejų metų bus $20\,000 \cdot 0,85 = 17\,000$ (Lt).

440. a) Kompiuterio vertė po metų bus $4000 \cdot 0,88 = 3520$ (Lt), o po dvejų metų bus $3520 \cdot 0,88 = 3097,6$ (Lt). Kompiuteris per dvejus metus nuvertės $4000 - 3097,6 = 902,4$ (Lt).
b) $2500 - 2500 \cdot 0,88 \cdot 0,88 = 2500(1 - 0,88^2) = 564$ (Lt).

441. *I būdas.* Parduotuvės pajamos yra $18\,000 - 14\,500 = 3500$ (Lt), o pelnas — $3500 - 2400 = 1100$ (Lt).
II būdas. Parduotuvės pelnas yra $18\,000 - 14\,500 - 2400 = 1100$ (Lt).

442. a) Įsigytas prekes parduotuvė pardavė už $a \cdot 1,3 = 1,3a$ (Lt).
b) Parduotuvė turėjo $1,3a - a = 0,3a$ (Lt) pajamų.
c) Parduotuvės prekybos išlaidos sudarė $0,3a \cdot 0,75 = 0,225a$ (Lt).
d) Daržovių parduotuvės pelnas yra $0,3a - 0,225a = 0,075a$ (Lt).

443. a) Parduotuvė įsigijo prekių už $\frac{a \cdot 100}{120} = \frac{5}{6}a$ (Lt).

a Lt — 120%
x Lt — 100%

b) Parduotuvė turėjo $a - \frac{5}{6}a = \frac{1}{6}a$ (Lt) pajamų.
c) Parduotuvės prekybos išlaidos sudarė $\frac{1}{6}a \cdot 0,6 = \frac{1}{10}a$ (Lt).
d) Daržovių parduotuvės pelnas yra $\frac{1}{6}a - \frac{1}{10}a = \frac{1}{15}a$ (Lt).

444. a) $5y^2 + 12y - 2$; b) x.

445. a) Pertvarkykime lygybės kairiąją pusę:
$(a - c)(a^2 + ac + c^2) = a^3 - a^2c + a^2c - ac^2 + ac^2 - c^3 = a^3 - c^3$.
Kadangi lygybės kairioji pusė lygi dešiniajai pusei su visomis a ir c reikšmėmis, tai lygybė yra tapatybė.
b) $(a - c)^3 = (a^2 - 2ac + c^2)(a - c) = a^3 - 2a^2c + ac^2 - a^2c + 2ac^2 - c^3 =$
$= a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3$.

446. a) 2; b) 12.

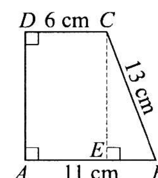
447. Kai $x = -\frac{1}{6}$, tai $\frac{5x}{x+1} = \frac{5 \cdot (-\frac{1}{6})}{-\frac{1}{6}+1} = \frac{5 \cdot (-\frac{1}{6}) \cdot 6}{(-\frac{1}{6}+1) \cdot 6} = \frac{-5}{-1+6} = -1$;

kai $x = -\frac{1}{2}$, tai $\frac{5x}{x+1} = \frac{5 \cdot (-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{5 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 2}{(-\frac{1}{2}+1) \cdot 2} = \frac{-5}{-1+2} = -5$.

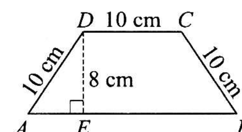
448. a) -5; 5; b) 1; c) -2; 2; 3; d) -4.

449. a) $x < 9$; b) $x \geqslant 9$.

450. a) $CE = AD = \sqrt{13^2 - (11 - 6)^2} = 12$ (cm);
b) $P_{ABCD} = 6 + 12 + 11 + 13 = 42$ (cm);
c) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(11 + 6) \cdot 12 = 17 \cdot 6 = 102$ (cm^2);
d) $AC = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$ (cm); $BD = \sqrt{12^2 + 11^2} = \sqrt{265}$ (cm).



451. a) $AE = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (cm); $AB = 6 \cdot 2 + 10 = 22$ (cm);
b) $P_{ABCD} = 22 + 10 \cdot 3 = 52$ (cm);
c) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(22 + 10) \cdot 8 = 32 \cdot 4 = 128$ (cm^2);
d) $AC = BD = \sqrt{8^2 + (10 + 6)^2} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ (cm).



452. $\frac{x}{5} = \frac{16}{20}$, $x = 4$; $\frac{y}{5} = \frac{20}{16}$, $y = 6\frac{1}{4}$; $\frac{z}{16} = \frac{5}{20}$, $z = 4$; $\frac{t}{16} = \frac{20}{5}$, $t = 64$; $\frac{v}{20} = \frac{5}{16}$, $v = 6\frac{1}{4}$; $\frac{w}{20} = \frac{16}{5}$, $w = 64$.

Galima spręsti ir kitaip. Ketvirtasis skaičius x yra poroje su 20, arba su 16, arba su 5. Tada $x \cdot 20 = 16 \cdot 5$, arba $x \cdot 16 = 20 \cdot 5$, arba $x \cdot 5 = 16 \cdot 20$.

Atsakymas. Uždavinys turi tris sprendinius: 4; $6\frac{1}{4}$; 64.

453. $2a$ — lyginis skaičius, nes bet kuris skaičius padaugintas iš 2 yra lyginis;
$3a$ — nelyginis, nes trigubas nelyginis yra nelyginis;
$3a$ — trigubas nelyginis yra nelyginis;
$a + 1$ — lyginis, nes nelyginis skaičius padidintas vienetu yra lyginis;
$a - 2$ — nelyginis, nes nelyginis sumažintas dviem yra nelyginis;
a^2 — nelyginis, nes nelyginio skaičiaus kvadratas yra nelyginis;
$2a + 1$ — nelyginis, nes lyginis skaičius, padidintas vienetu yra nelyginis.

454. a)

b)
1 2 3 4 119 120

Atsakymas. a) 4 taškus; b) 119 atkarpų.

455. a) $12 \cdot 9 = 108\,(\mathrm{m}^2)$;
b) $12\sqrt{9^2 + (6-4)^2} = 12\sqrt{85}\,(\mathrm{m}^2) \approx 110{,}6\,(\mathrm{m}^2)$;
c) $2 \cdot 12\sqrt{3^2 + (\frac{9}{2})^2} = 12\sqrt{117} \approx 129{,}8\,(\mathrm{m}^2)$.

456. a) $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$; b) $-\frac{2}{3} > -\frac{3}{4}$.

457. a) 784π cm^3; b) 98π cm^3.

458. Jeigu $GB = 13x$, $BD = 6x$, $DF = 6x$, tai $13x + 6x + 6x = 16$, $x = \frac{16}{25}$. Todėl $GB = 13 \cdot \frac{16}{25} = 8{,}32\,(\mathrm{m})$, $GD = 19 \cdot \frac{16}{25} = 12{,}16\,(\mathrm{m})$, $AG = 5 + \frac{3}{2} = 6{,}5\,(\mathrm{m})$, $GC = 5 + 3 + \frac{3}{2} = 9{,}5\,(\mathrm{m})$. Pagal Pitagoro teoremą:
$AB = \sqrt{8{,}32^2 - 6{,}5^2} = \sqrt{26{,}9724} = 5{,}1934... \approx 5{,}2\,(\mathrm{m})$,
$CD = \sqrt{12{,}16^2 - 9{,}5^2} = \sqrt{57{,}6156} = 7{,}5904... \approx 7{,}6\,(\mathrm{m})$,
$EF = \sqrt{16^2 - 12{,}5^2} = \sqrt{99{,}75} = 9{,}9874... \approx 10{,}0\,(\mathrm{m})$.

Papildomi 11 skyriaus kartojimo uždaviniai

1. Dirbtuvė per vieną savaitę pagamino 400 detalių. Jų gamybos sąnaudų 6,5% sudarė 1248 Lt. Pagamintas detales dirbtuvė pardavė parduotuvei po 55 Lt už kiekvieną, o ši pardavė jas pirkėjams su 30% antkainiu. Parduotuvės prekybos išlaidos realizuojant šias detales sudarė 21,5% įplaukų, gautų pardavus šias detales.

a) Kokios yra detalių gamybos sąnaudos?	19 200 Lt
b) Kokia detalės savikaina?	48 Lt
c) Kokį antkainį (procentais) taiko dirbtuvė parduodama detalę parduotuvei?	$14\frac{7}{12}$%
d) Kokia detalės pirkimo (didmeninė) kaina?	55 Lt
e) Kokia detalės pardavimo (mažmeninė) kaina?	71,5 Lt
f) Kokios įplaukos pardavus 400 šių detalių?	28 600 Lt
g) Kokios parduotuvės pajamos pardavus 400 šių detalių?	6600 Lt
h) Kiek išlaidų turėjo parduotuvė parduodama 400 detalių?	6149 Lt
i) Koks parduotuvės pelnas?	451 Lt

2. Kulinarijos ceche kepant bandeles, kurių savikaina 0,2 Lt, gamybos sąnaudos sudarė 500 Lt. Cecho kioske 2000 bandelių buvo parduota su 40% antkainiu, o likusios — su 25% pardavimo kainos nuolaida. Bandelių prekybos išlaidos sudarė 23% įplaukų, gautų pardavus visas iškeptas bandeles.

a) Kiek kulinarijos ceche iškepta bandelių?	2500 bandelių
b) Kokia bandelės didmeninė kaina?	0,2 Lt
c) Kokia bandelės mažmeninė kaina?	0,28 Lt
d) Kokia bandelės kaina su nuolaida?	0,21 Lt
e) Kokios kiosko įplaukos pardavus visas bandeles?	$0{,}28 \cdot 2000 + 0{,}21 \cdot 500 = 665$ (Lt)
f) Kokios kiosko pajamos pardavus visas bandeles?	$665 - 500 = 165$ (Lt)
g) Kokios kiosko prekybos bandelėmis išlaidos?	152,95 Lt
h) Koks kiosko (cecho) pelnas?	12,05 Lt

Pastaba. Stipresniems klasės mokiniams galima pateikti tik paskutinįjį abiejų uždavinių klausimą.

12. TYRIMO UŽDAVINIAI

Šio skyriaus skyreliuose nėra aiškinamojo teksto, tik pateikiamas vieno uždavinio sprendimo pavyzdys ir suformuluojamos analogiškų uždavinių sąlygos. Tačiau čia nėra vien mokymas pagal pavyzdžius. Paskutiniuose dviejuose skyreliuose nepateikiamas ir pavyzdys. Tyrimo uždavinių tikslas — vystyti matematinius mokinių gabumus, atkaklumą, skatinti susidomėjimą matematika. Šiuos uždavinius reikėtų spręsti ištisus metus neatidedant mokslo metų pabaigai. Labai svarbus savarankiškas mokinių darbas. Mokytojui nereikėtų teikti skubią pagalbą, tegul mokinys „kapstosi", tyrinėja pats, nors tam sugaištų ir ne vieną dieną. Vienoje klasėje sunkesniems tyrimo uždaviniams spręsti galima skirti daugiau laiko, kitoje — mažiau. Labai blogai, jei šių uždavinių sprendimui iš viso nebūtų rasta laiko. Ypač būtų skriaudžiami tie, kurie gali rimtai mokytis matematikos. Šio skyriaus uždaviniai sudaro galimybę individualizuoti mokymą, organizuoti mokinių savarankišką darbą per pamokas. Tyrimo uždavinius galima spręsti per papildomus užsiėmimus, ruošiantis olimpiadoms.

Mokėti spręsti šio skyriaus uždavinius mokiniams nėra privaloma. Bet moksleiviai, išsprendę šiuos uždavinius, turėtų būti skatinami.

Toliau pateikiame skyriaus uždavinių sprendimus, nurodymus arba atsakymus.

12.1. Laimėk žaidimą

1. Šiame žaidime „laimintys" skaičiai yra $100, 90, 80, \ldots, 20, 10$. Pradedantysis šį žaidimą pralaimės, jeigu antrasis žaidėjas po pirmojo pasakyto žaidėjo skaičiaus x kiekvieną kartą pridės $10-x$. Bet užtektų antrajam bent sykį pažeisti tą taisyklę, ir galės laimėti pradedantysis: jis iš karto papildo sumą iki apvalaus dešimčių skaičiaus.

2. Pradėkime aiškintis nuo galo. Pradedantysis laimės, jei jo varžovas turės imti kauliukus tada, kai ant stalo jų bus tik 6. Kad ir kiek iš tų šešių kauliukų varžovas paimtų, pradedantysis po to paims visus likusius. Kiti „pralaimintys" skaičiai yra šie: 12, 18, 24.
Pradedantysis šį žaidimą laimės, jei žais taip: pirmą kartą paims keturis kauliukus, o po to kiekvieną kartą po tiek kauliukų, kad ant stalo jų liktų 18, 12, 6.

3. Sprendimo ieškokime nuo galo atimties ir dalybos veiksmais:

$2000 - 4 = 1996$ (vienintelis ėjimas)

$1996 - 4 = 1992$ (vienintelis ėjimas)

$1992 : 3 = 664$ (galima būtų atimti 4, bet mūsų tikslas — kuo greičiau artėti prie 0)

$664 - 4 = 660$

$660 : 3 = 220$

$220 - 4 = 216$

$216 : 3 = 72$

$72 : 3 = 24$

$24 : 3 = 8$

$8 - 4 = 4$

$4 - 4 = 0$

Žaidimo eiga:

Skalės parodymai	Įmetami centai
$0+4=4$	2
$4+4=8$	2
$8\cdot 3=24$	5
$24\cdot 3=72$	5
$72\cdot 3=216$	5
$216+4=220$	2
$220\cdot 3=660$	5
$660+4=664$	2
$664\cdot 3=1992$	5
$1992+4=1996$	2
$1996+4=2000$	2
Iš viso:	37 ct

Įrodyti, kad tai ir yra pigiausias būdas — sunku. Kad reikia dalyti, kai galima dalyti — joks argumentas: tai priklauso nuo veiksmų „kainos". Sakykime, kad už sudėtį reikia mokėti 1 centą, o už daugybą — 1000 centų. Tada geriau 50 kartų sudėti.

Pateikiame griežtą uždavinio sprendimą, kurį verta panagrinėti su stipresniaisiais mokiniais.
Iš pradžių išspręskime paprastesnį uždavinį:
Kaip mažiausiu operacijų skaičiumi pridedant 4 arba dauginant iš 3 galima gauti iš 0 skaičių 2000?
Pirmu ėjimu neverta dauginti iš 3: nulį padauginę iš 3, vėl gausime nulį. Todėl trumpiausiame algoritme pirmas ėjimas turi būti +4. Vadinasi, reikia kuo greičiau nuo 4 pasiekti 2000. Kadangi visi tarpiniai skaičiai (gaunami kaskart pridedant 4 arba dauginant iš 3) dalijasi iš 4, tai galima „suprastinti iš 4" ir suformuluoti uždavinį taip:
Kaip mažiausiu operacijų skaičiumi pridedant 1 arba dauginant iš 3 galima gauti iš 1 skaičių 500?
Dabar uždavinį „apsukime":
Kaip mažiausiu operacijų skaičiumi atimant 1 arba dalijant iš 3 gauti iš 500 skaičių 1?
Pirmas ėjimas priverstinis, nes 500 nesidalija iš 3, todėl $500 \xrightarrow{-1} 499$. Antras ėjimas taip pat priverstinis: $499 \xrightarrow{-1} 498$. Trečiame ėjime galima rinktis: dalyti iš 3 arba atimti 4. Kadangi norime kuo greičiau pasiekti 1, tai spėjame, kad kai tik galima dalyti, reikia dalyti. Taip elgdamiesi, gauname:

$498 \xrightarrow{:3} 166$

$166 \xrightarrow{-1} 165$

$165 \xrightarrow{:3} 55$

$55 \xrightarrow{-1} 54$

$54 \xrightarrow{:3} 18$

$18 \xrightarrow{:3} 6$

$6 \xrightarrow{:3} 2$

$2 \xrightarrow{-1} 1$

Iš 498 gauti 1 reikia 8 operacijų, o iš viso atliekama 11 operacijų.
Dabar įrodykime, kad greičiau to atlikti neįmanoma. Galima būtų taikyti perrankos metodą, t. y. išrašyti visus kelius, vedančius į 1, ir išsirinkti trumpiausią. (Kompiuteriu tai vienas juokas — pasiūlykite mokiniams tai padaryti.) Bet galima žymiai sumažinti perranką: juk 8 žingsnių kelią jau turime, tad iš karto galime atmesti ilgesnius.
Braižykime galimybių medį (nagrinėjame kelius nuo 498 iki 1):

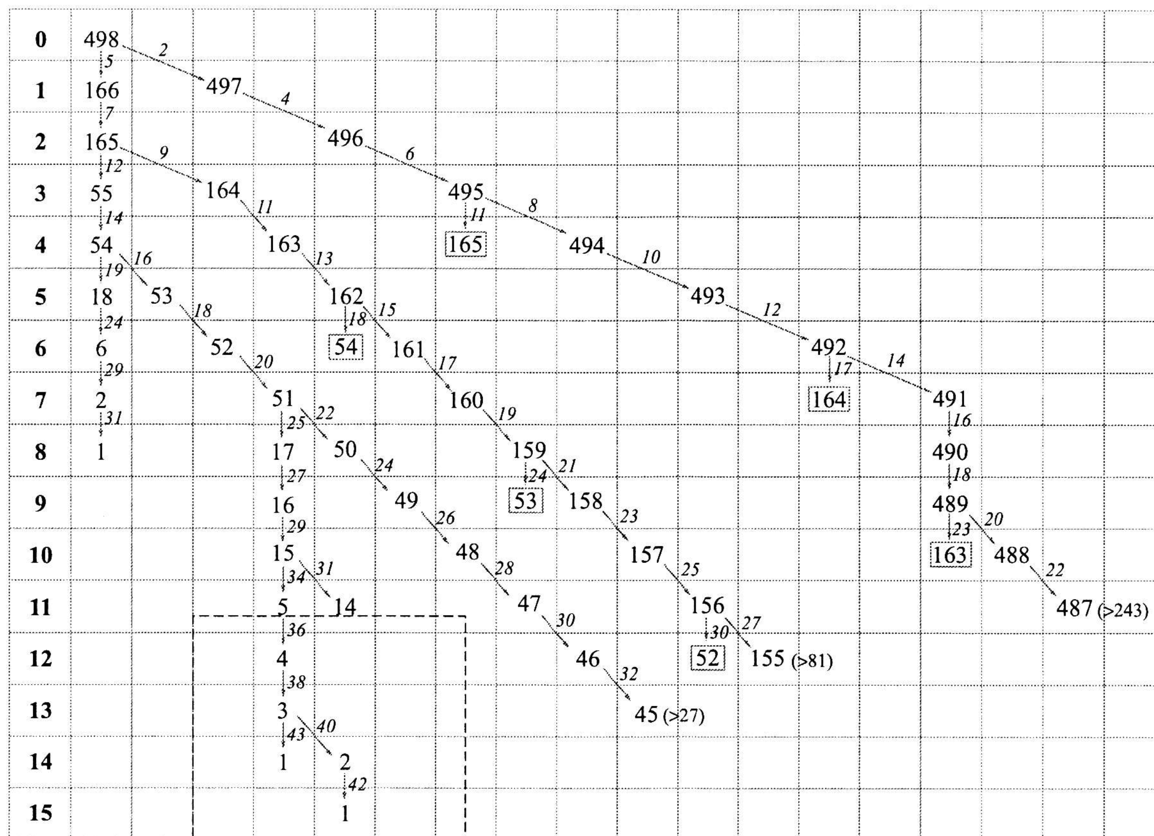
Žingsnio Nr.													
0	498												
1	166		497										
2	165				496								
3	55	164					495						
4	54		163				165		494				
5	18	53		162			55	164			493		
6	6	52		54	161		54		163				492
7	2												
8	1												

Toliau braižyti šakas nebeverta: kadangi po kiekvienos operacijos skaičius sumažėja ne daugiau kaip 3 kartus, tai per likusias dvi operacijas negalima gauti 1 iš skaičių, didesnių už 9. (Panašiai jau 5-tame žingsnyje galėjome „kirsti" šakas su skaičiais didesniais už 81; beje, kirsti galėjome ir šaką, kurioje 5-tu žingsniu gavome 55, nes skaičių 55 jau buvome gavę pirmame stulpelyje 3 žingsniu.)
Taigi įrodėme, kad trumpiausias kelias iš 498 į 1 yra 8 žingsnių.

Grįžkime prie uždavinio, kai už kiekvieną operaciją reikia mokėti. Jei operacijos kainuotų vienodai, tai viską lemtų žingsnių skaičius. Bet mažesnis žingsnių skaičius nėra pakankamas argumentas, kai operacijos kainuoja nevienodai. Pavyzdžiui, jeigu sudėtis kainuoja 1 centą, o daugyba — 1000 centų, tai aišku, kad pigiau „nusileisti“ nuo 498 į 1 atimties operacijomis.

Vėl braižykime medžius. Pirmiausia apskaičiuokime, kiek kainavo trumpiausia šaka (virš rodyklių sumuojame įmestus centus):

$498 \xrightarrow{5} 166 \xrightarrow{7} 165 \xrightarrow{12} 55 \xrightarrow{14} 54 \xrightarrow{19} 18 \xrightarrow{24} 6 \xrightarrow{29} 2 \xrightarrow{31} 1$. Vadinasi, trumpiausia (bet dar neaišku, ar pigiausia) šaka kainavo 31 centą. Taigi galima skaičiuoti kainas ir nukirsti tas šakas, kurios yra brangesnės už 31 centą.



Taip pat galima nukirsti šakas, ilgesnes už 15 žingsnių, nes jų kaina tikrai ne mažesnė už $16 \cdot 2 = 32$ centus ($32 > 31$), ir šakas, kuriose yra skaičiai, jau gauti kitose šakose *anksčiau ir pigiau* (nukirtimo vietoje tokie skaičiai įrėminti stačiakampyje). Nesunku įsitikinti, kad galima kirsti ir tas šakas, kuriose po 15 ėjimo yra skaičiai, didesni už 3, po 14 — didesni už 9, po 13 — už 27, po 12 — už 81, po 11 — už 243.

Lieka tik 3 šakos: pradinė

$498 \longrightarrow 166 \longrightarrow 165 \longrightarrow 55 \longrightarrow 54 \longrightarrow 18 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$, kuri kainuoja $5 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 31$ centą, šaka $498 \longrightarrow 166 \longrightarrow 165 \longrightarrow 55 \longrightarrow 54 \longrightarrow 53 \longrightarrow 52 \longrightarrow 51 \longrightarrow 17 \longrightarrow 16 \longrightarrow 15 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$, kuri kainuoja $5 \cdot 5 + 9 \cdot 2 = 43$ centus ir šaka $498 \longrightarrow 166 \longrightarrow 165 \longrightarrow 55 \longrightarrow 54 \longrightarrow 53 \longrightarrow 52 \longrightarrow 51 \longrightarrow 17 \longrightarrow 16 \longrightarrow 15 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$, kuri kainuoja $4 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 42$ centus. Paskutines dvi šakas galima buvo kirsti ir po 11 žingsnio, nes jų kaina tame žingsnyje viršijo 31 centą. Beje, iš 3 gauti 1 yra pigiau atimant negu dalijant. Taigi pigiausia yra pradinė šaka.

Grižę prie pradinio uždavinio, matome, kad pigiausias kelias yra

$0 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 24 \longrightarrow 72 \longrightarrow 216 \longrightarrow 220 \longrightarrow 660 \longrightarrow 664 \longrightarrow 1992 \longrightarrow 1996 \longrightarrow 2000$.

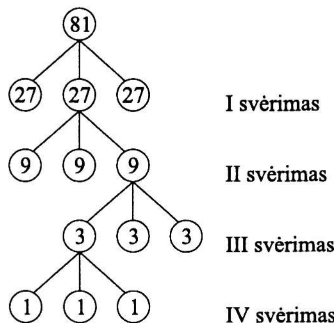
Jo kaina yra $5 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 37$ centai.

4. Jeigu rate būtų 2^n vaikų, tai paskutinis jame liktų tas, nuo kurio pradedama skaičiuoti, t. y. pirmasis. Skaičiuokime ratu išvesdami iš jo kas antrą vaiką. Išėjus iš rato 16 vaikų sustokime, nes rate tada lieka 2^5 vaikų. Pirmojo iš likusių rate (ties kuriuo sustojome) numeris bus $16 \cdot 2 + 1 = 33$. Jis ir lieka rate iki galo.

12.2. Atrask netikrą monetą

5. Pirmąkart sverdami ant lėkštelių dedame po 9 monetas ir 9 atidedame. Taip nustatysime 9 monetas, tarp kurių yra ir netikroji. Toliau sveriame taip, kaip aprašyta pavyzdyje.

6. Schema užpildoma taip:



Pastaba. Nesunku įrodyti, kad 3 svėrimų neužteks. Iš tikrųjų, kad ir kaip skirstytume monetas į 3 grupes — kurias dedame ant vienos lėkštelės, kurias dedame ant kitos lėkštelės ir kurias atidedame — po pirmo svėrimo bus monetų grupė, kurioje yra ne mažiau kaip $81 : 3 = 27$ monetos. Tarkime, kad mums „nesiseka", ir lengvesnė moneta yra toje didžiojoje grupėje. Po antro svėrimo bus grupė, kurioje yra ne mažiau kaip 9 monetos, ir gali atsitikti, kad joje yra lengvesnė moneta. Po trečio svėrimo bus grupė, kurioje yra 3 monetos, ir gali atsitikti, kad joje yra lengvesnė. Ją išskirti reikės dar vieno (ketvirto) svėrimo.

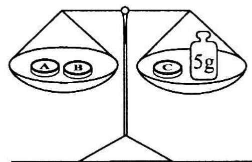
7. Paprasčiausia elgtis taip: pirmąkart sveriant gauti 27 monetų grupę su lengvesniąja moneta. Dedame po 27 monetas ant svarstyklių. Jeigu kuri nors grupė lengvesnė, tai netikroji moneta yra joje. Jeigu grupės sveria vienodai, tai netikroji moneta yra tarp likusių 22 monetų. Papildome tą grupę 5 tikromis monetomis, ir vėl turime 27 monetų grupę. Toliau sprendžiame kaip praeitame pavyzdyje.

8. a) Monetas padalijame į tris krūveles po 10. Po to sverdami palyginame dviejų krūvelių masę. Jei jų masė vienoda, tai visos jos tikros. Antrąkart sverdami palyginame atidėtų 10 monetų masę su tikrų 10 monetų, paliktų vienoje lėkštelėje, mase. Jeigu nusvers tikros monetos, tai netikroji moneta lengvesnė, o jeigu nusvers atidėtos monetos, tai netikroji moneta sunkesnė.
Jeigu pirmąkart pasvėrus paaiškėtų, jog vienos iš krūvelių masė mažesnė, tai antrąkart sverdami jos masę palyginame su 10 atidėtų monetų mase.

b) Visas monetas suskirstome į tris krūveles, pavyzdžiui: 10, 10 ir 15. Po to sverdami palyginame krūveles po 10 monetų. Jei jų masė vienoda, tai visos jos tikros. Sverdami antrąkart palyginame atidėtų 15 monetų masę su mase 15 tikrų monetų.
Jeigu pirmąkart sveriant paaiškėja, jog vienos iš krūvelių (po 10 monetų) masė mažesnė, tai antrąkart sverdami jos masę palyginame su mase 10 monetų iš 15 atidėtų (jos visos tikros).

9. Maišelius sunumeruojame nuo 1 iki 5. Iš pirmo maišelio išimame vieną monetą, iš antro — dvi, iš trečio — tris, iš ketvirto — keturias ir iš penkto — penkias. Visas išimtas monetas kartu pasveriame. Sakykime, kad jų masė yra m gramų. Jei visos išimtos monetos būtų tikros, tai jos svertų $10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 150\,(\text{g})$. Skirtumas $m - 150$ parodys maišelio numerį, kuriame yra netikros monetos.

10. Monetas pažymėkime raidėmis A, B, C ir D, o jų mases atitinkamai a, b, c ir d. Padėkime ant vienos svarstyklių lėkštelės monetas A ir B, o ant kitos — monetą C ir 5 g svarelį.

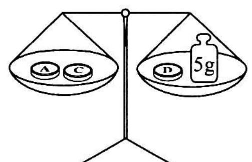


Galimi tokie svėrimo rezultatai:

1) $a + b = c + 5$. Tuomet netikra moneta yra D. Todėl kitąkart sverdami ant vienos svarstyklių lėkštelės dedame monetą D, o ant kitos — 5 g svarelį ir nustatome — sunkesnė ar lengvesnė yra moneta D už kitas monetas.

2) $a + b \neq c + 5$. Tada netikra moneta yra arba A, arba B, arba C. Galimi du atvejai:

   1. $a + b > c + 5$. Tuomet arba C yra netikra lengvesnė moneta, arba viena iš A ir B yra netikra sunkesnė moneta. Antrąkart sverdami dedame ant vienos svarstyklių lėkštelės monetas A ir C, o ant kitos — monetą D ir 5 g svarelį. Tuomet:
   jei $a + c = d + 5$, tai B — netikra sunkesnė moneta;
   jei $a + c > d + 5$, tai A — netikra sunkesnė moneta;
   jei $a + c < d + 5$, tai C — netikra lengvesnė moneta.

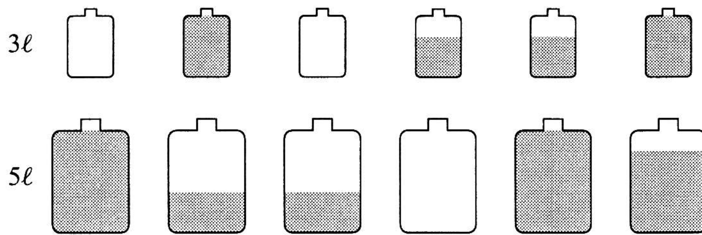


($d = 5$ g)

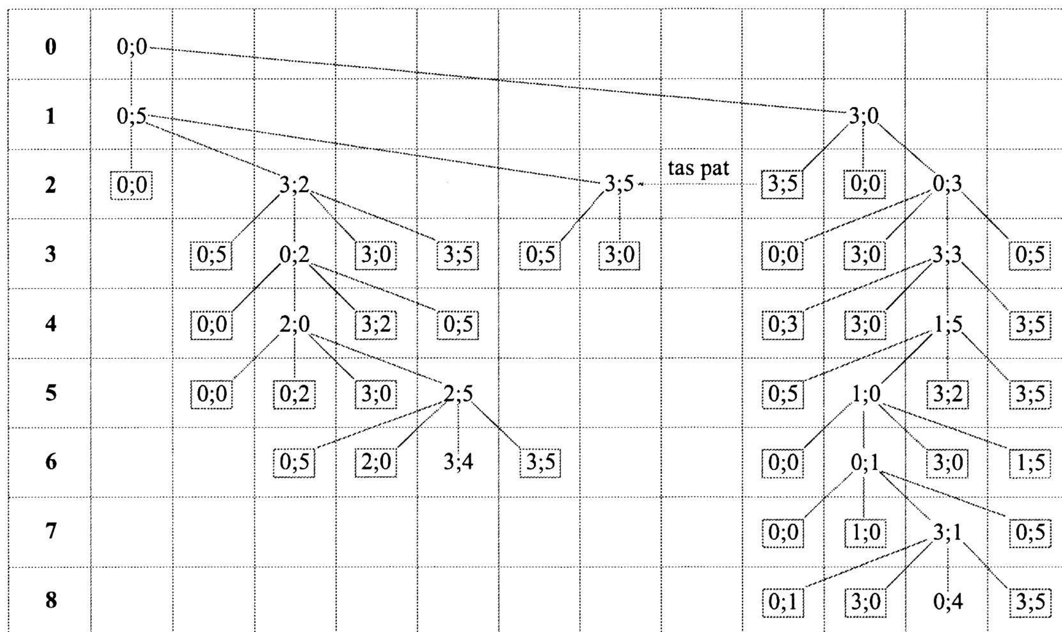
   2. $a + b < c + 5$. Tuomet arba C yra netikra sunkesnė moneta, arba viena iš A ir B yra netikra lengvesnė moneta. Kitąkart sverdami dedame taip:
   jei $a + c = d + 5$, tai B — netikra lengvesnė moneta;
   jei $a + c > d + 5$, tai C — netikra sunkesnė moneta;
   jei $a + c < d + 5$, tai A — netikra lengvesnė moneta.

12.3. Išpilstyk skysčius

11. Antru indu pasemiame 5 ℓ vandens ir iš jo nupilame į pirmą indą 3 ℓ. Antrame inde lieka 2 ℓ. Iš pirmo indo visą vandenį išpilame ir į jį supilame 2 ℓ iš antro indo. Antru indu pasemiame 5 ℓ vandens ir iš jo 1 ℓ nupilame į pirmą indą. Tuomet antrame inde lieka 4 ℓ.
Pilstymus galima pavaizduoti piešiniu:



Pastaba. Braižant medžius vėl nesunku įrodyti, kad tai pats trumpiausias pilstymo būdas. (Tai, kad 3 ℓ inde yra 1 litras, o 5 ℓ inde — 2 litrai vandens, žymėsime taip: 1; 2. Padėtį, kuri jau buvo aukščiau, apvesime stačiakampiu ir šaką nupjausime. Nagrinėsime visus, net ir beprasmiškus pilstymus.)



Matome, kad iš viso (išmetus beprasmiškus pasikartojimus) yra tik 2 būdai gauti 4 litrus:
0; 0 ⟶ 0; 5 ⟶ 3; 2 ⟶ 0; 2 ⟶ 2; 0 ⟶ 2; 5 ⟶ 3; 4
0; 0 ⟶ 3; 0 ⟶ 0; 3 ⟶ 3; 3 ⟶ 1; 5 ⟶ 1; 0 ⟶ 0; 1 ⟶ 3; 1 ⟶ 0; 4
Iš jų trumpesnis yra pirmas būdas — 6 pylimai (antras būdas — 8 pylimai).
Panašiai galima elgtis ir sprendžiant kitus uždavinius.

12. Pilstymo schema:

Pilstymai	24 ℓ	13 ℓ	11 ℓ	5 ℓ
Pradinė padėtis	24	0	0	0
1	11	13	0	0
2	11	8	0	5
3	11	0	8	5
4	16	0	8	0
5	3	13	8	0
6	3	8	8	5
7	8	8	8	0

13. Pilstymo schema:

11 ℓ	7 ℓ	6 ℓ
4	14	6
4	8	12
8	8	8

14. Pilstymo schema:

Pilstymai	Statinė (30 ℓ)	Kibiras (9 ℓ)	Bidonas (5 ℓ)
Pradinė padėtis	30	0	0
1	25	0	5
2	25	5	0
3	20	5	5
4	20	9	1
5	29	0	1
6	29	1	0
7	24	1	5
8	24	6	0

15. Pilstymo schema:

Pilstymai	15 ℓ	15 ℓ	5 ℓ	4 ℓ
Pradinė padėtis	15	15	0	0
1	10	15	5	0
2	10	15	1	4
3	14	15	1	0
4	14	15	0	1
5	9	15	5	1
6	9	15	2	4
7	13	15		0
8	13	11		4
9	15	14		2

16. Pilstymo schema:

Pilstymai	12*k*	8*k*	5*k*
Pradinė padėtis	12	0	0
1	4	8	0
2	4	3	5
3	9	3	0
4	9	0	3
5	1	8	3
6	1	6	5
7	6	6	0

12.4. Perrink ir surask sprendinius

Skyrelyje nėra išspręsto pavyzdžio, todėl mokytojui teks pavyzdį pasirinkti pačiam ir parodyti mokiniams, kaip sprendžiami panašūs uždaviniai. Tokio tipo uždavinių yra „Kengūros“ užduotyse ir įvairiuose olimpiadų rinkiniuose. Pateikiame pluoštelį tinkamų uždavinių iš G. Zubelevičiaus „Maskvos matematikos olimpiadų uždavinyno“ („Prosvesčenije“, Maskva, 1967, 1971, rusų k.) ir „Olimpiadinio matematikos uždavinyno“ (red. J. Kubilius, „Šviesa“, Kaunas, 1962, 1972) ir „Kengūros“ konkursų.

Atstatykite skaitmenis:

1.
```
  123,*7*
+ 348,2*4
  2*9,748
  -------
  *3*,497
```

2.
```
  3*5,67*
- 20*,**9
  -------
   96,889
```

3.
```
     *****
  ×   34*
  --------
     *****
    ******
  235038
  --------
  ******6*
```

4.
```
     **4
  ×  23*
  ------
    **24
   1***
  1***
  ------
  *1****
```

5.
```
    ***
  × 2**
  -----
   2**5
  **0
  -----
  83***
```

6.
```
       23**85
  ×      ***5
  -----------
      *****2*
     *347**
    **9570
   *04***
  -----------
   7********
```

7.
```
     *7***
  ×    743
  --------
    *****5
   ******
  ******
  --------
  42***87*
```

8.
```
     **8
  ×  ***
  ------
    7**4
   7**4
  7**4
  ------
  **8***
```

9.
```
     **6
  ×  3**
  ------
    2**6
   2**2
  **8*
  ------
  14****
```

10.
```
     ****
  ×    *2
  -------
    18*48
   7499*
  -------
   ***66*
```

11.
```
     **8*
  ×   *7*
  -------
    3***0
   **0*2
  ***3*
  -------
  ***9***
```

12. 237 × *1*** = 7***065

13.
```
      *,3*
  ×  **,4
  -------
      ***
    ***0
  -------
   *****4
```

14.
```
  ****** | ***
  ***5   | **8
  ----
   ****
    9**
   ----
    ***
    ***
    ---
      0
```

15.
```
  ******* | **
  ***     | **8**
  ---
   **
   **
   --
   ***
   ***
   ---
     0
```

16.
```
  ****** | ***
  ****   | *8*
  ----
   ***
   ***
   ---
   ****
   ****
   ----
      0
```

17. Angliškai 40 — forty, 10 — ten, 60 — sixty. Lygybė 40 + 10 + 10 = 60 užrašoma šiais žodžiais:

```
  f o r t y
+     t e n
      t e n
  ---------
  s i x t y
```

Kuriuos skaitmenis reikia parašyti vietoj raidžių, kad lygybė būtų teisinga (vienodos raidės — vienodi skaitmenys, o skirtingos raidės — skirtingi skaitmenys)?

18. Šalia pavaizduotoje sudėtyje kiekviena raidė žymi tam tikrą skaitmenį, tas pačias raides atitinka vienodi skaitmenys, o skirtingas raides — skirtingi skaitmenys. Šitame užraše skaitmens 0 nėra. Kokia gali būti didžiausia sumos DREI reikšmė?

```
    O N E
+ D E U X
  -------
  D R E I
```

A 9863 **B** 9873 **C** 9874 **D** 9875 **E** 9876

19. Koks skaitmuo gali būti A?

A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

```
    8 * 0 6
+         *
  ---------
  A 4 7 5 4
```

20. Kuris iš pateiktų skaičių dalijasi iš 7, kad ir kokie būtų skaitmenys P ir Q?

A QQPPQP **B** QPQPQP **C** PQPPQQ **D** QPPQQP **E** PPPQQQ

21. Jeigu vienodos raidės atitinka vienodus skaitmenis, o skirtingos raidės – skirtingus, tai

10 000 · AROO – 10 000 · KANG + KANGAROO =

A AROOAROO **B** AROOKANG **C** KANGKANG **D** KANGAROO **E** KAGANROO

Siūlytume mokytojui vadovėlyje esančius uždavinius nagrinėti tokia tvarka: 18a, 18c, 18d, 19, 17, 18b. Paskutinis (20 uždavinys) nieko bendra su kitais uždaviniais neturi, ir jį galima spręsti bet kada. Žinoma, 17–19 uždavinius galima spręsti „kompiuterine“ perranka, t. y. nagrinėti iš eilės visus galimus variantus ir žiūrėti, kas išeis. Bet tai, aišku, ne matematika.

Beje, tvarkingai ir apžvelgiamai visų uždavinių sprendimus vėl galima užrašyti „medžiais“..

17. Uždavinys reikalauja daug kruopštaus darbo, todėl nuo jo pradėti skyrelį nerekomenduojama. Tokiuose uždaviniuose geriausia pradėti nuo raidės, kurios reikšmę galima nesunkiai nustatyti. Mūsų atveju akivaizdu, kad $D = 1$. Tai reiškia, kad $P \geqslant 5$. Kitų raidžių galimos reikšmės nėra vienintelės, todėl prisieina perrinkti visus atvejus: $P = 5, 6, 7, 8, 9$. Lengva įsitikinti, kad atvejis $P = 5$ yra negalimas, nes tada E gali būti tik 0 arba 1. Bet 1 jau užimtas raidės D, todėl $E = 0$. Tada aišku Š gali būti tik 0 arba 1. Bet abu šie skaičiai jau užimti, — prieštara. Šį samprotavimą trumpai užrašysime taip: $D = 1,\ P = 5 \to E = 0{,}1 \to E = 0 \to Š = 0{,}1 \to \varnothing$.
Atvejis $P = 9$ irgi neįmanomas: $D = 1,\ P = 9 \to E = 8{,}9 \to \varnothing$ (E negali būti 9 — skaitmuo jau užimtas; E negali būti 8, nes pirmame stulpelyje $P + P$ lyginis, o iš antro stulpelio $E + E$ persikels vienetas; beje tokio samprotavimo toliau prireiks dar ne kartą).
Ištirti atvejus, kai $P = 6, 7, 8$, žymiai sunkiau. Rašyti reikia daug, ir čia vėl padeda „medžiai“. Kai medžio šaka duoda sprendinį, tai ją žymime !, priešingu atveju — $\varnothing$ (žr. 155 p.).
Taigi iš viso gavome 5 sprendinius.
Atsakymas.

$$+\begin{array}{r}75234\\75234\\\hline 150468\end{array}\qquad +\begin{array}{r}75346\\75346\\\hline 150692\end{array}\qquad +\begin{array}{r}75469\\75469\\\hline 150938\end{array}\qquad +\begin{array}{r}87265\\87265\\\hline 174530\end{array}$$

18. a) Kadangi 2 ir B sandauga baigiasi 6, tai $B = 3$ arba $B = 8$. Patikriname abu atvejus: $32 \cdot 73 \neq 6396$, $82 \cdot 78 = 6396$.

b) *I būdas.* Pastebėkime, kad sandauga bus triženklė, kai $A \geqslant 3$. Kai $A = 3$, tai $B \geqslant 4$: $34 \cdot 3 = 102$, $35 \cdot 3 = 105$, $36 \cdot 3 = 108$, $37 \cdot 3 = 111$, $38 \cdot 3 = 114$, $39 \cdot 3 = 117$. Taigi tinka $A = 3$, $B = 7$. Lygiai taip pat reikia tikrinti, kai $A = 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
II būdas. Kadangi $\overline{CCC} = C \cdot 111 = 3 \cdot C \cdot 37$, tai $\overline{AB} \cdot A = 3 \cdot C \cdot 37$. Bet 37 yra pirminis skaičius, todėl $\overline{AB}$ išskaidžius pirminiais dauginamaisiais vienas daugiklis turi būti 37, t. y. $\overline{AB}$ turi būti 37 kartotinis. Bet dviženklių 37 kartotinių yra tik du: 37 ir 74. Pirmu atveju gauname $\overline{AB} = 37$, $A = 3$, $B = 7$, ir iš tikrųjų $37 \cdot 3 = 111$ ($C = 1$). Antru atveju $\overline{AB} = 74$, $A = 7$, $B = 4$, bet $74 \cdot 4 = 296$, taigi šios reikšmės netinka.

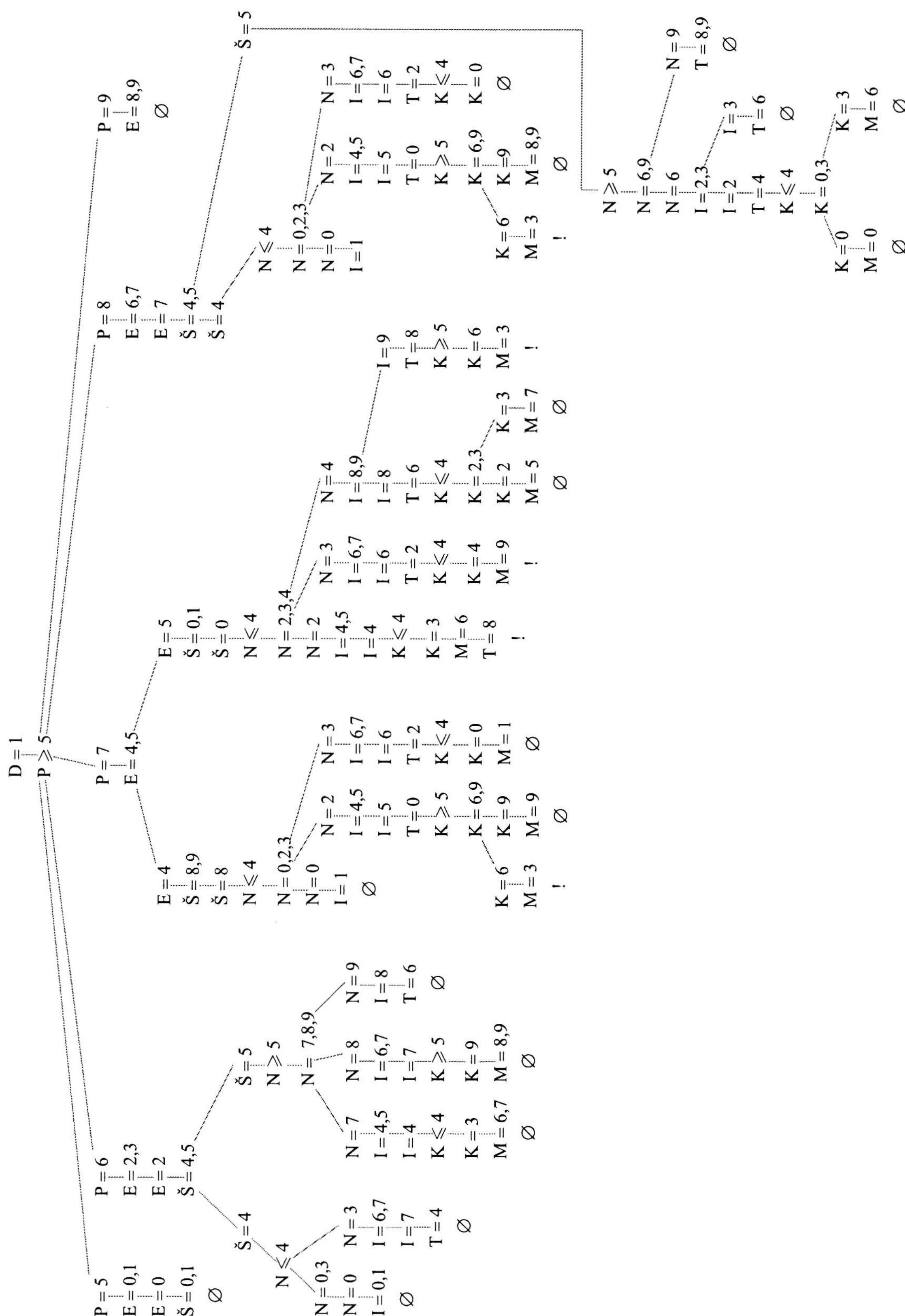
c) Galima atmesti vieną dėmenį AAAA:

$$+\begin{array}{r}B\\AAAA\\AAAA\\\hline B0000\end{array}$$

Aišku, kad B gali būti 1 arba 2 ($B + AAAA + AAAA < 9 + 10\,000 + 10\,000 = 20\,009$).
Kai $B = 1$, tai nėra tokios A reikšmės, kad $2A + B$ baigtųsi 0, nes sandauga 2A visada lyginis skaičius, o prie jo pridėję vienetą gausime nelyginį skaičių.
Kai $B = 2$, tai $2A + 2$ baigiasi nuliu, kai $A = 4$ arba kai $A = 9$. Patikrinę nustatome, kad $A = 4$ netinka, o $A = 9$ — tinka.
Iš tikrųjų, $2 + 9999 + 9999 = 20\,000$.

d) Pastebėkime, kad $A \neq 0$, $B \neq 0$. Kadangi 8 klasėje laipsnio rodiklis gali būti tik sveikasis skaičius, tai A dalijasi iš B, be to, $A > B$. Iš sąlygos $C = A + B$ matome, kad A ir B suma turi būti vienaženklis skaičius. Vadinasi, B gali būti tik 1, 2, 3 (4 netinka, nes A tada gali būti tik 8, bet tada $A + B = 8 + 4 > 9$).
I būdas.
$B = 1$: $A1^A = 1CAC$. Pakėlę laipsniu skaičių, kuris baigiasi 1, gausime skaičių, kuris irgi baigiasi 1. Bet 1 jau užimtas.
$B = 2$: $A2^{A/2} = 2CAC$, $A = 4, 6$. Kai $A = 4$, tai $42^2 \neq 2646$. Kai $A = 6$, tai 62^3 — šešiaženklis skaičius, — prieštara.
$B = 3$, tada A gali būti tik 6. Tikriname: $63^2 = 3969$.
Atsakymas.

a) $\times\begin{array}{r}82\\78\\\hline 6396\end{array}$ b) $\times\begin{array}{r}37\\3\\\hline 111\end{array}$ c) $+\begin{array}{r}2\\9999\\9999\\9999\\\hline 29999\end{array}$ d) $63^{6/3} = 3969$.



19. Kadangi A + A + A baigiasi A, tai A + A baigiasi 0. Vadinasi, 1) A = 0 arba 2) A = 5.

1) Kai A = 0, tai turime:

$$
\begin{array}{r}
Š\ 0\ L\ N\ 0 \\
+\ \ Š\ 0\ L\ N\ 0 \\
Š\ 0\ L\ N\ 0 \\
\hline
K\ L\ 0\ I\ D\ 0
\end{array}
$$

Iš trečio stulpelio turime, kad L + L + L = 3L < 10. Vadinasi, L = 1, 2, 3.

Kai L = 1, tai iš antro stulpelio Š = 7, K = 2 (nes be 7 nėra kitų skaimenų, kurie padauginti iš 3 baigtųsi 1):

$$\begin{array}{r} 7\,0\,1\,N\,0 \\ +\;\; 7\,0\,1\,N\,0 \\ 7\,0\,1\,N\,0 \\ \hline 2\,1\,0\,I\,D\,0 \end{array}$$

Jeigu N = 3, tai D = 9 ir I = 3 (prieštara); jeigu N = 4, tai D = 2 (prieštara); jeigu N = 5, tai D = 5 (prieštara); jeigu N = 6, tai D = 8, I = 4 (tinka); jeigu N = 8, tai D = 4, I = 5 (tinka); jeigu N = 9, tai D = 7 (prieštara).

Kai L = 2, tai Š = 4, K = 1. Turime:

$$\begin{array}{r} 4\,0\,2\,N\,0 \\ +\;\; 4\,0\,2\,N\,0 \\ 4\,0\,2\,N\,0 \\ \hline 1\,2\,0\,I\,D\,0 \end{array}$$

Jeigu N = 3, tai D = 9, I = 6 (tinka); jeigu N = 5, tai D = 5 (prieštara); jeigu N = 6, tai D = 8, I = 7 (tinka); jeigu N = 7, tai D = 1 (prieštara); jeigu N = 8, tai D = 4 (prieštara); jeigu N = 9, tai D = 7, I = 8 (tinka).

Kai L = 3, tai Š = 1, K = 0 (prieštara).

Iš viso su A = 0 gavome 5 sprendinius.

2) Kai A = 5, tai turime:

$$\begin{array}{r} Š\,5\,L\,N\,5 \\ +\;\; Š\,5\,L\,N\,5 \\ Š\,5\,L\,N\,5 \\ \hline K\,L\,5\,I\,D\,5 \end{array}$$

Iš trečio stupelio L = 0, 1, 2, 3.

Kai L = 0, tai Š = 3, K = 1. Turime:

$$\begin{array}{r} 3\,5\,0\,N\,5 \\ +\;\; 3\,5\,0\,N\,5 \\ 3\,5\,0\,N\,5 \\ \hline 1\,0\,5\,I\,D\,5 \end{array}$$

Tada, jeigu N < 3, tai I = 0 (prieštara); jeigu 3 < N < 7, tai D = 1 (prieštara); jeigu N = 7, tai D = 2, I = 2 (prieštara); jeigu N = 8, tai D = 5 (prieštara); jeigu N = 9, tai D = 8, I = 2 (tinka).

Kai L = 1, tai Š = 0 (prieštara);

Kai L = 2, tai Š = 7, K = 2 (prieštara);

Kai L = 3, tai Š = 4, K = 1, I = 9. Turime:

$$\begin{array}{r} 4\,5\,3\,N\,5 \\ +\;\; 4\,5\,3\,N\,5 \\ 4\,5\,3\,N\,5 \\ \hline 1\,3\,5\,9\,D\,5 \end{array}$$

Dabar jeigu N = 0, tai D = 1 (prieštara); jeigu N = 2, tai D = 7 (tinka).

Kai A = 5, gavome 2 sprendinius. Vadinasi, iš viso yra 7 sprendiniai.

Atsakymas.

$$\begin{array}{r} 35095 \\ +\;\; 35095 \\ 35095 \\ \hline 105285 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40230 \\ +\;\; 40230 \\ 40230 \\ \hline 120690 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40260 \\ +\;\; 40260 \\ 40260 \\ \hline 120780 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40290 \\ +\;\; 40290 \\ 40290 \\ \hline 120870 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45325 \\ +\;\; 45325 \\ 45325 \\ \hline 135975 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70160 \\ +\;\; 70160 \\ 70160 \\ \hline 210480 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 70180 \\ +\;\; 70180 \\ 70180 \\ \hline 210540 \end{array}$$

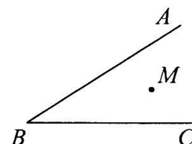
20. Jeigu $b = 0$, tai ir $a = 0$. Gauname prieštaravimą sąlygai, kad tik vienas iš skaičių lygus nuliui. Jeigu $a = 0$, tai arba $b = 0$, arba $b = c$. Vėl gauname prieštaravimą sąlygai. Lieka vienintelis atvejis: $c = 0$. Tada duotoji lygybė tampa tokia: $|a| = b^3$. Kadangi $|a| > 0$, tai b — teigiamasis skaičius. Vadinasi, $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$.

Beje, tokių skaičių tikrai yra, pavyzdžiui $a = -8$, $b = 2$, $c = 0$. Tada $|-8| = 2^2(2 - 0)$. Nesunku suvokti, kad uždavinio sąlygą tenkina tik trejetai $(-t^3, t, 0)$, $t > 0$.

12.5. Mėgstantiems geometriją

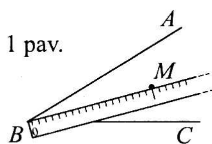
21. Uždavinį patogu spręsti etapais:

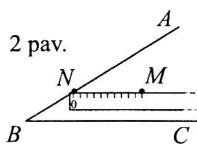
1) įsitikiname (pavyzdžiui, naudodamiesi liniuote), kad yra tokia atkarpa, kurios galai būtų kampo kraštinėse, o kampo viduje esantis taškas dalytų tą atkarpą pusiau;
2) randame būdą, kaip nubrėžti reikiamą atkarpą, t. y. nustatome, kur yra tos atkarpos galai;
3) įsitikiname (įrodome), kad nubrėžtąją atkarpą taškas dalija pusiau.

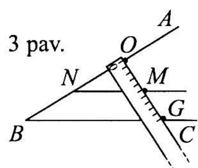


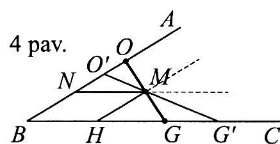
1 etapas. Nusibraižome kampą ABC ir jo viduje imame tašką M. Liniuote su padalomis nustatome, kur maždaug yra ieškomoji atkarpa, ir įsitikiname, kad ji yra vienintelė. Galima elgtis taip:

Pirmiausia liniuotę padedame taip, kad nulinė jos padala sutaptų su kampo viršūne B, o liniuotės kraštas eitų per tašką M (žr. 1 pav.). Pasirenkame vieną kampo kraštinę, pvz., BA ir stumiame sukdami liniuotę taip, kad nulinė padala būtų ant kampo kraštinės, o liniuotės kraštas eitų per tašką M. Pastebime, kad liniuotės kraštas nekirs kampo kraštinės BC tol, kol nulinė padala nepraeis taško N ($MN \parallel BC$) (žr. 2 pav.). Liniuotę sukame tol, kol randame tokį tašką O, kad $OM = MG$ (žr. 3 pav.). Pastebime, kad nulinei padalai artėjant nuo taško N iki O atstumas $O'M$ yra mažesnis už atstumą MG', bet visą laiką tų atstumų skirtumas mažėja (žr. 4 pav.). Nulinei padalai praėjus tašką O atstumas $O'M$ pasidaro didesnis už atstumą MG' ir atstumų skirtumas vis didėja.
Tą patį gauname ir analogiškai stumdami ir sukdami liniuotę taip, kad nulinė padala būtų ant kampo kraštinės BC. (Kai liniuotės nulinė padala priklauso atkarpai HB ($HM \parallel BA$), tai liniuotės kraštas nekerta kampo kraštinės BA.)
Paeksperimetavę nesunkiai įsitikiname, kad nepriklausomai nuo kampo ABC didumo ir taško M padėties yra tik viena ieškoma atkarpa.



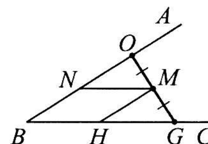






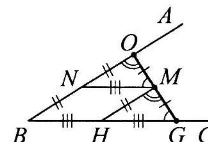
2 etapas. Panagrinėkime brėžinį, kuriame $OM = MG$, $MN \parallel CB$, $MH \parallel AB$.

1. Pastebėkime, kad trikampiai OMN ir MGH yra lygūs pagal kraštinę ir kampus prie jos, nes $\angle OMN = \angle MGH$ (kaip atitinkamieji kampai susidarę lygiagrečias tieses NM ir BC perkirtus kirstine OG), $\angle NOM = \angle HMG$ (kaip atitinkamieji kampai, susidarę lygiagrečias tieses BO ir HM perkirtus kirstine OG). Vadinasi, $HM = NO$, $HG = NM$.



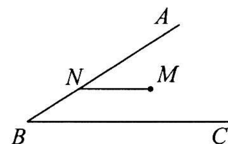
2. Keturkampis $BNMH$ yra lygiagretainis, nes $BN \parallel HM$, $NM \parallel BH$. Lygiagretainio priešingos kraštinės yra lygios, todėl $BN = HM$, $BH = NM$.

3. Taigi $BN = NO$ ir $BH = HG$.

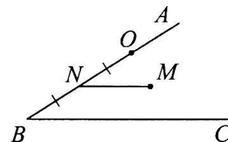


Vadinasi, ieškomą atkarpą galima braižyti taip:

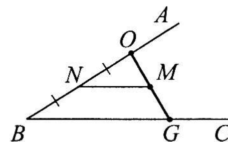
- per tašką M brėžiame MN lygiagrečią CB;

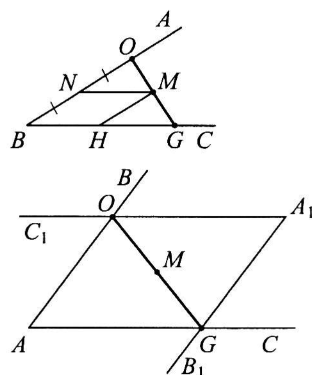


- kampo kraštinėje BA atidedame tašką O taip, kad ON būtų lygu BN;



- per taškus O ir M brėžiame atkarpą OG.
(Tašką G galėjome rasti taip, kaip ir tašką O.)





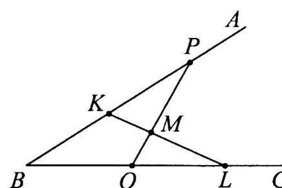
3 etapas. Įrodysime, kad $OM = MG$. Brėžiame $MH \parallel AB$. Tada $MH = NB$, kaip lygiagretainio priešingos kraštinės, todėl $MH = ON$. Trikampiai OMN ir MGH yra lygūs pagal kraštinę ir du kampus prie jos, todėl $OM = MG$.

Pastabos.

1. Visiems mokiniams užtenka įveikti tik 1 etapą. Su stipresniais mokiniais rekomenduojama išsiaiškinti ir 2 etapą. 3 etapą reikėtų nagrinėti su tais mokiniais, kurie pajėgūs suprasti 23 uždavinio sprendimą, pateiktą toliau.
2. Trikampio vidurio linija bus nagrinėjama 9 klasėje, todėl jos savybėmis nesirėmėme.
3. Nubraižyti ieškomą atkarpą galima ir taikant simetriją taško atžvilgiu, t. y. nubraižius kampą $B_1A_1C_1$, simetrišką kampui BAC taško M atžvilgiu. Tų kampų kraštinių susikirtimo taškai yra ieškomos atkarpos galai.

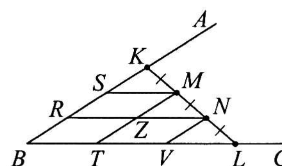
Atsakymas. Tokia atkarpa visada yra viena, ir tai nepriklauso nuo taško padėties.

22. Šį uždavinį, kaip ir 21 uždavinį, patogu spręsti etapais.

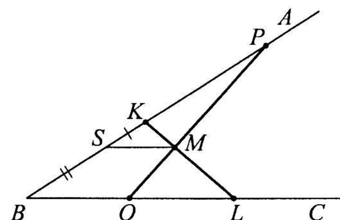


1 etapas. Nusibraižę brėžinį, naudodamiesi liniuote išsiaiškiname, kad galima nubraižyti dvi atkarpas. Viena tokia atkarpa (KL) prasideda kampo kraštinėje BA, t. y. $KM : ML = 1 : 2$, o kita (OP) — kampo kraštinėje BC, t. y. $OM : MP = 1 : 2$.

Pastaba. Galima ieškoti atkarpų, kurias taškas M dalija santykiu $1 : 2$ ir $2 : 1$, skaičiuojant nuo tos pačios kampo kraštinės, nes $PM : MO = 2 : 1$.



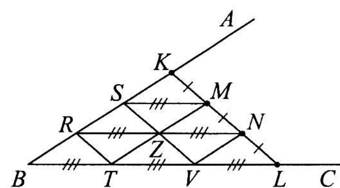
2 etapas. Tarkime, kad tokia atkarpa jau nubrėžta ($KM : ML = 1 : 2$). Pažymėkime ML vidurio tašką N ir per M ir N brėžkime tieses, lygiagrečias kampo kraštinėms BA ir BC. Pastebėkime, kad trikampiai VNL, ZMN ir SKM yra lygūs, o keturkampiai $BRZT$, $RSMZ$ ir $TZNV$ yra lygūs lygiagretainiai. Vadinasi, $BR = RS = SK$, $BT = TV = VL$.



Taigi ieškomą atkarpą galima braižyti taip:

- per tašką M brėžiame MS, lygiagrečią CB;
- kampo kraštinėje BA atidedame tašką K taip, kad $SK = \frac{BS}{2}$;
- per taškus K ir M brėžiame atkarpą KL.

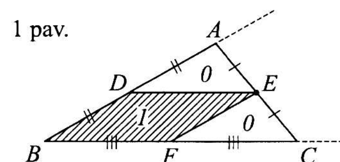
Kitą ieškomą atkarpą galima gauti kampo kraštinėje BA pažymėjus tašką P taip, kad $SP = 2BS$.



3 etapas. Įrodykime, kad $KM : ML = 1 : 2$. Brėžiame $RN \parallel BC$, $NV \parallel AB$, $MT \parallel AB$. MT ir RN susikirtimo tašką Z junkime su S ir su V, o R — su T. Nesunku įrodyti, kad susidarę 9 trikampiai yra lygūs. Todėl $KM = MN = NL$, o tai reiškia, kad taškas M dalija atkarpą KL santykiu $1 : 2$.

Atsakymas. Tokios atkarpos visada yra dvi — einant nuo pasirinktos kraštinės viena atkarpa dalijama santykiu $1 : 2$, kita $2 : 1$, ir tai nepriklauso nuo taško padėties.

23. Spręsdami šį uždavinį remsimės 21 uždavinio sprendimu. Išspręskime uždavinį bet kokiam (nebūtinai lygiakraščiam) trikampiui.



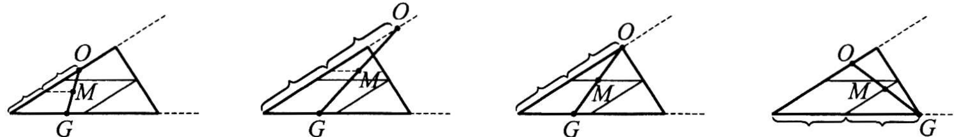
1 žingsnis.

Ieškokime atkarpos, kurios galai būtų trikampio kraštinėse BA ir BC. Vadinasi, sprendžiame 21 uždavinį su papildoma sąlyga, kad atkarpos galai negali būti už taškų A ir C. Prisiminę, kaip brėžiame atkarpą, matome, kad taškas M turi būti ne aukščiau taško D ir ne dešiniau taško F, t. y. tokią atkarpą nubrėžti galima, kai taškas M yra užbrūkšniuotoje zonoje (tokia atkarpa yra vienintelė). Jei taškas M yra neužbrūkšniuotoje zonoje (baltuose trikampiuose), tai ieškomos atkarpos vienas galas išeina už trikampio ribų.

Jei taškas M priklauso atkarpai DE, tai vienas ieškomos atkarpos galas sutampa su trikampio viršūne A, o jei taškas M priklauso atkarpai per FE, tai — sutampa su viršūne C.

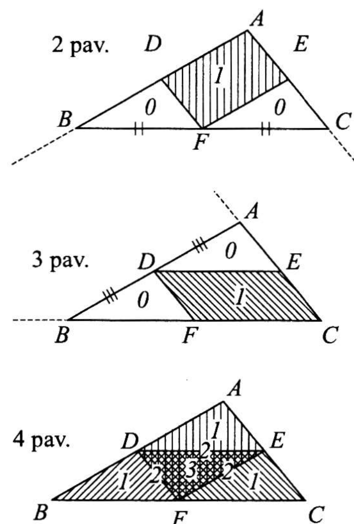
Pastaba. Paveikslėliuose skaitmuo *1* žymi, kad reikiama atkarpa, kai taškas M priklauso užbrūkšniuotai zonai, yra viena, o skaitmuo *0* — kad tokios atkarpos nėra, kai taškas M priklauso neužbrūkšniuotai zonai.

Nubraižykime tokių atkarpų pavyzdžių:



Taigi, jei taškas M priklauso lygiagretainiui $BDEF$ įskaitant ir jo kraštines DE ir EF, tai galima nubrėžti vieną atkarpą, kurios galai priklauso trikampio kraštinėms BA ir BC.

2 žingsnis.
Ieškokime atkarpos, kurios galai būtų trikampio kraštinėse AB ir AC. Analogiškai gausime, kad tokią atkarpą galima nubrėžti, kai taškas M yra užbrūkšniuotame lygiagretainyje (žr. 2 pav.).



2 pav.

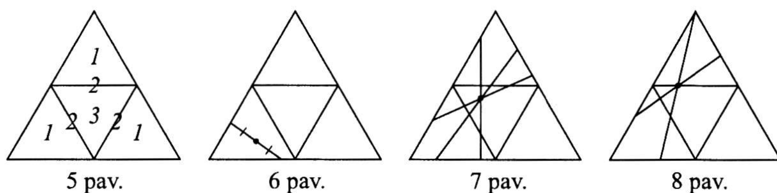
3 pav.

4 pav.

3 žingsnis.
Ieškokime atkarpos, kurios galai priklausytų trikampio kraštinėms CB ir CA. Vėl gausime užbrūkšniuotą zoną, kurioje gali būti taškas M (žr. 3 pav.).

4 žingsnis.
Uždėkime 1, 2 ir 3 pav. vieną ant kito (žr. 4 pav.).
Taigi jei taškas M yra:
1) trikampio DEF viduje, tai per jį galima nubrėžti 3 atkarpas, kurių galai bus kiekvienoje iš trikampio ABC kraštinių porų;
2) kampiniuose trikampiuose, tai ieškoma atkarpa bus viena;
3) atkarpose DE, EF ar FD, tai tokių atkarpų bus dvi.

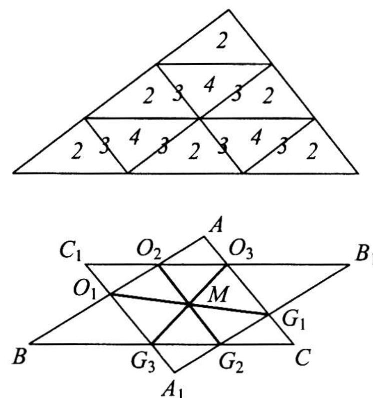
Atsakymas. Atkarpų skaičius priklauso nuo to, kur yra tas taškas (žr. 5 pav.). Jei jis yra „kampinėse“ zonose (*1*), tai atkarpa yra viena (žr. 6 pav.). Jei jis yra vidurinėje zonoje (*3*), tai atkarpos yra trys (žr. 7 pav.). Jei jis yra vidurio linijoje (*2*), tai atkarpos yra dvi (žr. 8 pav.).



5 pav. 6 pav. 7 pav. 8 pav.

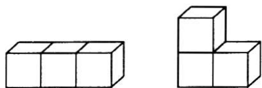
Pastabos.

1. Atsakymas nepriklauso nuo trikampio rūšies.
2. Galima pasiūlyti išspręsti tokį uždavinį: „Trikampio viduje paimtas taškas. Kiek yra atkarpų, kurių galai būtų trikampio kraštinėse (arba viršūnėse) ir kurias tas taškas dalytų santykiu 1 : 2?“ Atsakymą pavaizduoti galima taip:

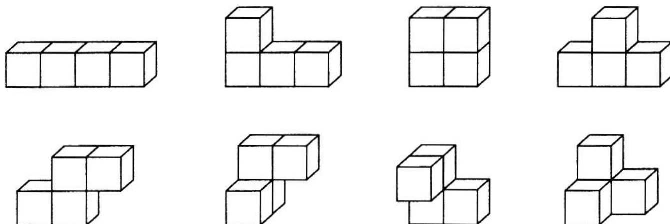


3. Nubraižyti ieškomas atkarpas galima ir panaudojus simetriją taško atžvilgiu (kaip ir 21 uždavinyje, žr. pastabos 3 punktą), t. y. pakanka nubraižyti trikampį $A_1B_1C_1$, simetrišką trikampiui ABC taško M atžvilgiu. Tų trikampių kraštinių susikirtimo taškai yra ieškomų atkarpų galai.

24. 3 kubeliai:



4 kubeliai:



Atsakymas. Iš 3 kubelių galima sukonstruoti 2 kūnus, iš 4 kubelių — 8 kūnus.

25. *Nurodymas.* Trikampė piramidė, kurios visos briaunos yra lygios, vadinama tetraedru. Skirtingais nelaikomi dažymo būdai, jei piramides (ar kubus) sukiojant galima juos sutapdinti taip, kad sutaptų visos spalvos.

1. Dviejų spalvų atvejis.

a) Užtenka kalbėti apie vieną spalvą — antrai liks kitos sienos.
Jei nudažyta 0 sienų — 1 būdas.
Jei nudažyta 1 siena, ją laikome pagrindu — 1 būdas.
Jei nudažytos 2 sienos, vieną iš jų laikome pagrindu, o tada tetraedrą sukame apie vertikaliąją ašį, kol antra siena taps užpakalinė — 1 būdas.
Jei nudažytos 3 sienos, nenudažytą laikome pagrindu — 1 būdas.
Jei nudažytos 4 sienos — 1 būdas.
Iš viso — 5 būdai.

b) Vėl kalbėkime apie vieną spalvą.
Jei nudažyta 0 sienų — 1 būdas.
Jei nudažyta 1 siena, ją laikome pagrindu — 1 būdas.
Jei nudažytos 2 sienos, vieną iš jų laikome pagrindu. Tada jei nudažyta priešinga siena — 1 būdas, jei nudažyta šoninė siena, ją galima sukant kubą padaryti užpakalinę — dar 1 būdas.
Jei nudažytos 3 sienos ir tarp jų yra priešingų, tai vieną iš jų laikome pagrindu, o kitą — viršutine siena. Tada kubą sukame apie vertikalią ašį, einančią per kubo centrą, kol trečia siena taps užpakaline — 1 būdas. Jei iš nudažytų trijų sienų priešingų nėra, tai vieną iš jų laikome pagrindu (tada viršutinė siena nudažyta kita spalva). Dar nudažytos dvi šoninės sienos, bet jos ne priešingos, taigi gretimos. Tada kubą sukame tol, kol nudažytos bus užpakalinė ir dešinioji siena. Taigi jei nudažytos 3 sienos, tai turime 2 būdus.
Jei nudažytos 4 sienos, tai kita spalva nudažytos 2 sienos, taigi vėl (kaip ir 2 sienų atveju) turime 2 būdus.
Jei nudažytos 5 sienos, tai kita spalva nudažyta 1 siena — 1 būdas (kaip ir 1 sienos atveju).
Jei nudažytos 6 sienos, tai kita spalva nudažyta 0 sienų — 1 būdas (kaip ir 0 sienų atveju).
Iš viso turime $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$ būdų.

2. Trijų spalvų atvejis.

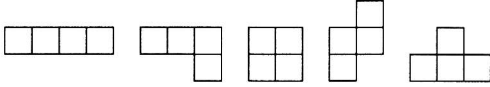
a) *I būdas.*
Kai I spalva nudažytos 4 sienos — 1 būdas.
Kai I spalva nudažytos 3 sienos — pagrindu laikome 4-tą sieną. Ji gali būti nudažyta II arba III spalva — 2 būdai.
Kai I spalva nudažytos 2 sienos, jas sukiodami kubą darome pagrindu ir užpakaline. Jei II spalva nudažytos 2 sienos (kairė ir dešinė) — 1 būdas. Jei II spalva nudažyta 1 siena — tai atrodytų, kad tai gali būti kairė arba dešinė — būtų 2 būdai (jų sukant apie vertikalią ašį sutapdinti negalima). Bet vis dėlto tuos 2 būdus sutapdinti galima: II spalvos sieną laikome pagrindu, o III — užpakaline. Taigi gauname tik 1 būdą. Jei II spalva nudažyta 0 sienų — dar 1 būdas. Taigi 2 sienų atveju iš viso yra 3 būdai.
Kai I spalva nudažyta 1 siena, ją laikome pagrindu. Jei dabar II spalva nudažytos 3 sienos — 1 būdas; jei 2 sienos — darome jas kairę ir dešinę — 1 būdas; jei 1 siena — darome ją užpakalinę — 1 būdas; jei 0 sienų — 1 būdas. Taigi iš viso čia turime 4 būdus.
Kai I spalva nudažyta 0 sienų, tai II spalva gali būti nudažytos 4 sienos — 1 būdas; 3 sienos, tada III spalvos sieną laikome pagrindu — 1 būdas; 2 sienos, tada jas darome pagrindu ir užpakaline — 1 būdas; 1 siena, tada ją laikome pagrindu — 1 būdas; 0 sienų — 1 būdas. Taigi čia turime dar 5 būdus.
Iš viso gauname $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ būdų.

II būdas.
Kadangi yra 4 sienos ir tik 3 spalvos, tai viena spalva bus nudažytos bent 2 sienos. Vadinasi, gali būti tik tokie vienodomis spalvomis nudažytų sienų skaičiaus variantai: $4-0-0$, $3-1-0$, $2-2-0$, $2-1-1$.
Atveju $4-0-0$ turime 3 būdus rinktis spalvą.
Atveju $3-1-0$ turime 3 būdus I spalvai ir 2 būdus II spalvai — 6 būdai.
Atveju $2-2-0$ turime 3 būdus (renkamės tik neimamą III spalvą).
Atveju $2-1-1$ turime 3 būdus pasirinkti I spalvą (šios spalvos sieną darome apatinę ir užpakalinę).
Iš viso yra 15 būdų.

b) Naudojant 3 spalvas galimi 57 dažymo būdai.

Atsakymas. a) 5; 15; b) 10; 57.

26.

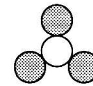


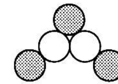
27. a) Akivaizdu, kad jei turime 1 monetą, tai ji laisva.

b) Jei turime dvi monetas, tai kiekviena jų laisva.

c) Jeigu trijų (ar bet kurio kito skaičiaus) monetų centrai yra vienoje tiesėje, tai kiekviena moneta yra laisva (užtenka monetą stumti statmenai tai tiesei). Jeigu monetų centrai sudaro trikampį, tai kiekviena moneta laisva (užtenka, pavyzdžiui, stumti monetos centrą į trikampio išorę atitinkama pusiaukampine).

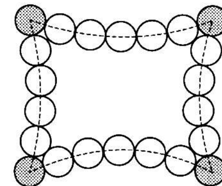
d) Kai monetos keturios, viena jų gali būti nelaisva. (Užtenka monetas sudėti „taisyklingai", kad jos liestų viena kitą (žr. piešinį), o tada kraštines monetas atitraukti nuo centrinės „per plaukelį", kad jos nebesiliestų.)





Bent trys monetos visada bus laisvos. Įsitikinti galima taip. Sujunkime kiekvienų dviejų monetų centrus. Jei taip sujungę gausime atkarpą, kuriai priklauso visos kitos atkarpos, tai visų 4 monetų centrai yra vienoje tiesėje ir visos jos laisvos. Jei taip sujungę gausime trikampį, kurio viduje ar kraštinėse yra visos kitos atkarpos (sakome, kad centrų iškilasis apvalkas yra trikampis), tai mažiausiai 3 monetos (trikampio viršūnėse) bus laisvos. Jei taip sujungę gausime keturkampį, kurio viduje yra visos kitos atkarpos (iškilasis apvalkas yra keturkampis), tai visos 4 monetos bus laisvos.

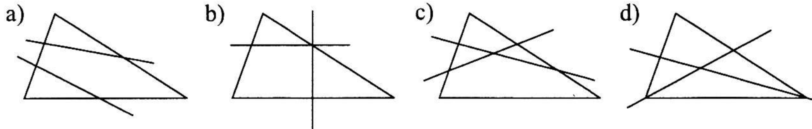
e) Panašiai įsitikiname, kad kai $n = 5$ ar $n = 6$, tai laisvų monetų mažiausiai yra 3.
Paeksperimentavę su $n = 7$ monetomis įsitikiname, kad visada laisvos bus bent 4 monetos. Kai $n > 7$, taip pat visada bus laisvos bent 4 monetos. Kad daugiau kaip 4 laisvų monetų gali ir nebūti, rodo piešinys dešinėje:



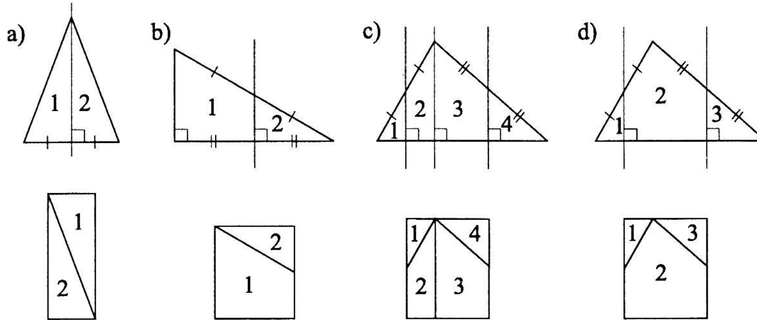
Taigi atsakymas toks. Kai $n \leqslant 3$, tai laisvų monetų mažiausiai yra n. Kai $n = 4, 5, 6$, tai laisvų monetų mažiausiai yra 3. Kai $n \geqslant 7$, tai laisvų monetų mažiausiai yra 4.

12.6. Karpyk ir dėliok ...

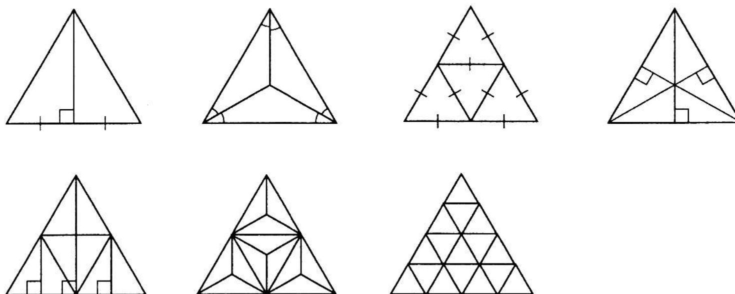
28. Galima padalyti taip:



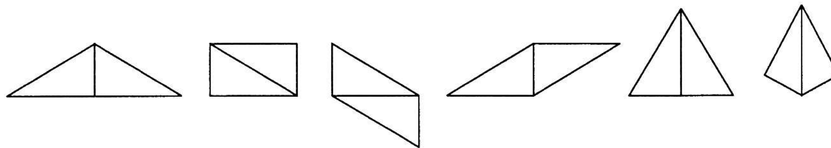
29. Galima padalyti taip:



30.

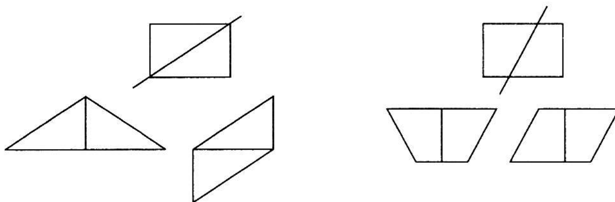


31.

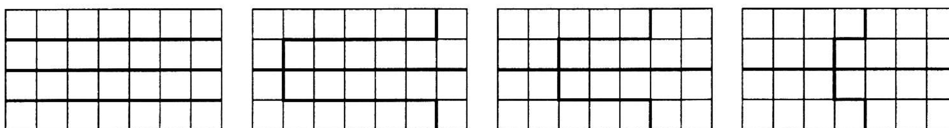


Atsakymas. Sudarytų figūrų plotai lygūs.

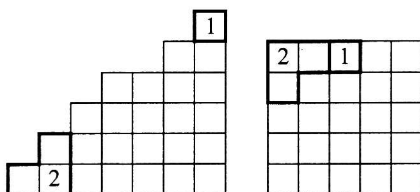
32.



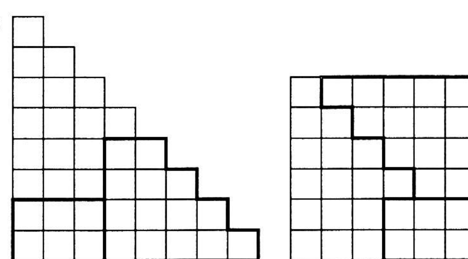
33.



34. a)



b)



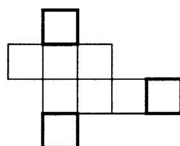
35.

	3 sienos	2 sienos	1 siena	Nė vienos sienos	Iš viso kubelių
$2 \times 2 \times 2$	8	–	–	–	8
$3 \times 3 \times 3$	8	12	6	1	27
$4 \times 4 \times 4$	8	24	24	8	54
$5 \times 5 \times 5$	8	36	54	27	125
$n \times n \times n$	8	$12(n-2)$	$6(n-2)^2$	$(n-2)^3$	n^3

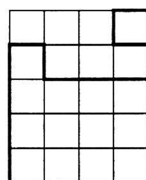
Pastaba. Labai naudinga būna pasitikrinti, ar neapsirikome skaičiuodami. Tam ir skirtas paskutinysis lentelės stulpelis: $2^3 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-3)^3 = (n-2+2)^3 = n^3$.

36. a) 8; b) 28; c) 28; d) 8.

37.



— mažiausiai reikia 3 vienetinių kvadratų, nes pridėjus vieną kvadratą perimetras gali padidėti daugiausiai 2 vienetais.



— daugiausiai galima pridėti 14 vienetinių kvadratų. Iš tikrųjų, pridėję daugiau kvadratų gautume figūros plotą, didesnį už 20. Tada net stačiakampio atveju perimetras būtų didesnis už 18.

38. Pirmąkart pakeitus balti lieka trys ketvirtadaliai: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$;
antrąkart pakeitus: $3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ ir t. t.
penktąkart pakeitus: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{243}{1024}$.
Atsakymas. $\frac{243}{1024}$.

39. Pirmąkart užlenkus apačioje lieka skaičiai 9–16;
antrąkart užlenkus apačioje lieka skaičiai 9–12;
trečiąkart — 9 ir 10;
ketvirtąkart — 10.
Vadinasi, viršuje yra kvadratas, pažymėtas skaičiumi 9.
Atsakymas. 9.

40. a) Trikampio plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5\,(\text{cm}^2)$.
Kvadrato plotas lygus $10^2 = 100\,(\text{cm}^2)$. Taigi reikės ne mažiau kaip $100 : 5 = 20$ (trikampių). 20 trikampių užteks, nes iš dviejų trikampių sudedame stačiakampį 2×5, iš 10 trikampių — stačiakampį 10×5 (pusę kvadrato).
b) Kubo paviršiaus plotas lygus $6 \cdot 20^2 = 2400\,(\text{cm}^2)$, todėl reikės $2400 : 5 = 480$ (trikampių). Tų 480 trikampių užteks, nes kubo paviršių sudaro 6 kvadratai 20×20. Kvadratą 10×10 uždengti mokame 20-čia trikampių. O kvadratą 20×20 sudaro keturi kvadratai 10×10. Taigi užteks $6 \cdot 4 \cdot 20 = 480$ (trikampių).

Rekomenduojamos literatūros sąrašas

Dėstydami matematiką 8 klasėje, mokytojai gali naudotis ne tik komplektine mokymo priemone „Matematika 8“. Yra daug įvairios papildomos literatūros, todėl kartais pasirinkti tinkamiausią nėra lengva. Siūlome mokytojams tokius leidinius.

1. *V. Gusevas, A. Mordkovičius.* Matematika. Informacinė medžiaga. Kaunas, „Šviesa“, 1990.
   Tai žinynas, kuriame trumpai išdėstyti algebros ir planimetrijos mokyklinio kurso pagrindiniai skyriai. Šalia teorinės medžiagos pateikiami išspręsti uždavinių pavyzdžiai. Knygoje atskirai pateiktos pagrindinės formulės ir sąsajos. Yra dalykinė rodyklė. Knyga tinka tiek mokytojams, tiek mokiniams.

2. *V. Gusevas, A. Orlovas, A. Rozentalis.* Užklasinis matematikos darbas VI–VIII klasėje. Pagalbinė priemonė mokytojams. Kaunas, „Šviesa“, 1982.
   Knygoje yra daug įvairaus sunkumo uždavinių, sugrupuotų į 26 temas. Knygoje pateikta daug vertingų metodinių nurodymų mokytojams, taip pat yra uždavinių sprendimai ir atsakymai.

3. *M. Stričkienė, V. Sičiūnienė.* Pasirengimo baigiamiesiems egzaminams medžiaga. Matematika. Vilnius, TEV, 2000.
   Tai žinyno tipo knyga, skirta pakartoti pagrindinės mokylos matematikos kursą. Kiekvienas iš 24 skyrelių sudarytas iš glaustos teorinės dalies ir skirtingo sunkumo uždavinių. Knyga gali naudotis 7–12 klasių moksleiviai ir mokytojai. Yra dalykinė rodyklė.

4. *B. Felsager, V. Jakobsen, G. Schomacker, M. Vedelsby.* Tikslieji mokslai humanitarams, I dalis. Vilnius, TEV, 1998.
   Tai Danijos gimnazijų 10–12 humanitarinių klasių moksleiviams skirta knyga. Ji turėtų palengvinti tiksliųjų mokslų mokymąsi tiems, kuriems tikslieji mokslai sekasi blogiau. Knyga tinka ir mūsų 8–12 klasių moksleiviams ir mokytojams. Matematikai skirti keturi skyriai: 2-ame skyriuje kartojamos elementariosios matematikos žinios, mokoma naudotis skaičiuokliu; 3-ame skyriuje kalbama apie proporcingumą ir tiesinę priklausomybę; 8-ame ir 9-ame skyriuose supažindinama su atsitiktinumu, aiškinama vidurkio ir histogramos sąvokos.

5. *B. Felsager, V. Jakobsen, G. Schomacker, M. Vedelsby.* Tikslieji mokslai humanitarams, II dalis. Vilnius, TEV, 1999.
   Matematikai skirti šeši skyriai. Aštuntokams tinka: 1-as skyrius — procentų skaičiavimas, ekonomikos uždavinių sprendimas; 2-as skyrius — tiesinė dviejų dydžių priklausomybė; 5-as skyrius — simetrija; 7-as skyrius — funkcijos sąvoka.

6. *M. Vosylienė.* Geometrija 10. Vilnius, TEV, 1999.
   Stereometrijos vadovėlis skirtas nereformuotos mokyklos 10 klasei. Šis vadovėlis tinka ir 8–12 klasių moksleiviams ir mokytojams. Aštuntokams rekomenduojame: 8-ą skyrių — piramidė, 10-ą skyrių — sukimosi kūnai. Knygos gale atskirai pateikti uždavinių atsakymai ir nurodymai, pagrindiniai teiginiai ir formulės, dalykinė rodyklė.

7. *P. Tannenbaumas, R. Arnoldas.* Kelionės į šiuolaikinę matematiką. Vilnius, TEV, 1995.
   Knyga sumanyta ir parašyta kaip įvadas į šiuolaikinę matematiką, padedantis suprasti jos taikymus praktiniams, ypač su visuomenės gyvenimu susijusiems uždaviniams spręsti. Autoriai, Kalifornijos Fresno universiteto (JAV) profesoriai, užsibrėžė tikslą sugriauti įsišaknijusį stereotipą, — kad mokyklinės matematikos kursas yra nuobodus, atitrūkęs nuo realaus pasaulio.
   Kiekvienas iš 16 knygos skyrių tinka ir aštuntokams.

8. *J. Mačys (sudarytojas).* Kengūra. Tarptautinio matematikos konkurso 1999 m. užduotys ir sprendimai. Vilnius, TEV, 2000.

9. *V. Vitkus.* Jaunajam matematikui. Uždavinynas V–X klasei. Kaunas, „Šviesa“, 1994.
   Uždavinynas skiriamas V–X klasės mokiniams, besiruošiantiems jaunųjų matematikų olimpiadoms, ir matematikos mokytojams. Knygoje pateiktos uždavinių sąlygos, sprendimai ir atsakymai.

10. *P. Gudynas, A. Zabulionis, J. Mačys, K. Liubinskas, A. Plikusas.* Matematika visiems. Papildoma matematikos medžiaga 8 klasei. Vilnius, „Margi raštai“, 1996.

11. *P. Gudynas, A. Zabulionis, J. Mačys, K. Liubinskas, A. Plikusas.* Matematika visiems. Papildoma matematikos medžiaga 9 klasei. Vilnius, „Margi raštai“, 1996.
    Abiejose knygelėse pateikti uždaviniai papildo matematikos mokymo programos skyrius. Užduotys pagal sunkumą suskirstytos į tris lygius: elementarus, vidutinis ir sudėtingas. Yra nemažai realaus turinio, matematinio tyrimo uždavinių.

12. Visi ankstesnieji matematikos vadovėliai, didaktinės medžiagos rinkiniai, nors jie neatitinka dabartinės programos.

Ši knyga skiriama mokytojui, dėstančiam matematiką 8 klasėje ir naudojančiam vadovėlį „Matematika 8, I ir II dalys" bei atitinkamą uždavinyną. Ją sudaro įvadas, pagrindinė dalis ir priedas.

Įvadinėje dalyje pateikti:

1. Pagrindinės mokyklos matematinio išsilavinimo standartai („Bendrojo išsilavinimo satandartai, 1–10 klasės", Vilnius, 1997, p. 23–36);
2. Matematikos bendroji programa („Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklos bendrosios programos", Vilnius, 1997, p. 266–280);
3. Vadovėlio „Matematika 8" turinys.

Pagrindinė knygos dalis atitinka vadovėlį „Matematika 8". Skyrių ir skyrelių pavadinimai tie patys, kaip ir vadovėlio, jų medžiaga pateikiama pagal vieningą schemą. Kiekviename skyriuje (ar jo skyreliuose):

- analizuojama teorinė medžiaga, išskiriant pagrindinius, svarbiausius dalykus;
- primenama, ko buvo mokoma anksčiau (***Pakartoti***), nurodoma, ko reikėtų mokyti einamuoju momentu (***Išmokti***), ir pateikiama skyrelio teorinės dalies santrauka su paaiškinimais (***Šiame skyrelyje***);
- pateikiami metodiniai-praktiniai nurodymai mokytojui;
- pateikiami sunkesnių uždavinių sprendimai ir visų uždavinių atsakymai (PRATIMAI IR UŽDAVINIAI). Dešinėje kolonėlėje pažymėti rekomenduojami uždavinyno uždaviniai. Taip pat ten rašomos įvairios pastabos apie atskirus pratimus ir uždavinius bei dedami juos iliustruojantys brėžiniai.

Priede pateiktas rekomenduojamos literatūros sąrašas.

ISBN 9986-546-82-6